CAPITULO I: DESIGUALDADES Y VALOR ABSOLUTO

OBJETIVOS

- Resolver desigualdades con una variable y representar su solución en la recta numérica o empleando la notación de intervalos.
- Resolver desigualdades que involucren valor absoluto.
- Modelarsituaciones problemas en términos de desigualdades.
- Clasificar cierta cantidad de datos acerca de una medida de acuerdo a una relación de orden, para luego interpretar en el lenguaje habitual su significado.
- Identificar en las relaciones de orden las diferentes jerarquías que se dan en ciertas organizaciones sociales.

DIAGNÓSTICO

Para éste capítulo es fundamental que el estudiante logre resolver ecuaciones en una variable; que sepa factorizar y conozca muy bien la recta real. Con el diagnóstico observaremos si esto ocurre.

1. Resolver para la letra indicada:

(a) $S=\dfrac{a-rl}{1-r}$; r (b) $\dfrac{x-2}{x-2}=1$; x (c) $\dfrac{x-2}{x-2}=0$; x

(d) $\dfrac{x-2}{x-2}=2$; x (e) $g=\dfrac{4\pi^2}{t^2}$; t (f) $A=2\pi r(r+h)$; r

2. Señalar en la recta de números reales y representar el conjunto con la notación de intervalo. $\{x/x\angle 0\}\cup\{x/x\geq 3\}$

3. Efectuar aplicando productos notables $\left(x^2-3x+4\right)^2$

4. Factorice lo máximo: a) $x^6+5x^5-81x^2-405x$

b) $4x^2-a^2+y^2-4xy+2ab-b^2$

5. Obtener el conjunto solución completando el cuadrado:

$3x^2 - 2x - 6 = 0$

6. Resolver $x^2 + \frac{5x}{3} + 1 = 0$ por la fórmula cuadrática

7. Resolver $2x^{2/3} - 5x^{1/3} - 3 = 0$

8. Resolver $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} - 2 = 0$

1.1. LA RECTA REAL

Para representar el conjunto de los números reales usamos un sistema de coordenadas que se llama la **recta real.** El número real que le corresponde a un **único punto** en particular de la recta real se llama **la coordenada** de este punto. El punto de la recta que corresponde al cero se llama **origen** de la recta real. A la izquierda del origen se ubica los números negativos y a la derecha los números positivos.

1.2. DESIGUALDADES O INECUACIONES

En esta unidad analizaremos una nueva propiedad de los números reales y es la que "EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES ES ORDENADO". Esto significa que si sobre una línea recta colocamos dos números "a" y "b", tales que "a" está a la izquierda de "b", esto significa que "a" es menor que "b" o que "b" es mayor que "a".

Para introducir este concepto de orden, se han creado una serie de símbolos así:
>Mayor que $\Rightarrow$ x > y (se lee: x es mayor que y)

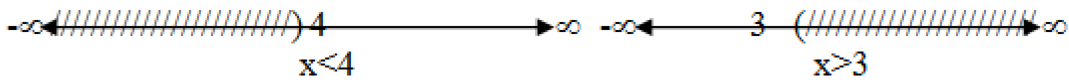
< Menor que $\Rightarrow$ x < y (se lee: x es menor que y)

$\geq$ Mayor o igual que $\Rightarrow$ x $\geq$ y (se lee: x es mayor o igual que y)

$\leq$ Menor o igual que $\Rightarrow$ x $\leq$ y (se lee: x es menor o igual que y)

A estos símbolos se le llaman signos de desigualdad y a las expresiones algebraicas que contengan estos símbolos se les llaman DESIGUALDADES y sus soluciones se representan en forma de intervalos. (Ej. $x + 5 > 4$, $x^2 < 6$, $2 > x^2 + 4$)

Si escribimos x < 4, queremos indicar que x está a la izquierda de 4 en la recta numérica. Y si escribimos x > 3, queremos indicar que x está a la derecha de 3 en la recta numérica.



__1.2.1. PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES__. El álgebra para operar las desigualdades es la misma que se utiliza en las expresiones algebraicas conocidas hasta el momento. La única diferencia radica en que, si multiplicamos o dividimos ambos miembros de una desigualdad por un mismo número NEGATIVO, la desigualdad CAMBIA de sentido.

__Ejemplo 1.__ $-3x < 12 \Rightarrow \dfrac{-3x}{-3} > \dfrac{12}{-3} \Rightarrow x > -4$

Reglas de las Desigualdades

1. Si a < b, entonces a +c < b+ c
2. Si a < b y c < d, entonces a + c < b + d
3. Si a < b y c > 0, entonces ac < bc
4. Si a < b y c < 0, entonces ac > bc
5. Si 0 < a < b, entonces 1/a > 1/b

Regla 1: Si tengo una desigualdad y le sumo una misma cantidad en ambos miembros de la desigualdad, el sentido de la desigualdad no cambia.

4<10 o 17>10

4+ (-2) <10+ (-2) 17+5>10+5

2 < 8 22 > 15

Regla 2: Si tengo dos desigualdades con el mismo sentido, al sumar las partes izquierdas y las partes derechas, el sentido de la desigualdad no me cambia.

5 > 3 + o 7< 1 +

4 > 2 5< 8

9> 5 12 < 9

Regla 3: Si tengo una desigualdad y multiplico ambos miembros por una cantidad positiva, el sentido de la desigualdad no me cambia.

5< 60 o -7 > -12

5. (+2) <60. (+2) -7. (+5) > -12. (+5)

10 < 120 -35 > -60

Regla 4: Si tengo una desigualdad y multiplico ambos miembros por una cantidad negativa, el sentido de la desigualdad me cambia.

$5 < 60$	o	$-7 > -12$
$5.(-2) > 60.(-2)$		$-7.(-5) < -12.(-5)$
$-10 > -120$		$35 < 60$

Regla 5: Si tengo una desigualdad con dos cantidades positivas, los inversos multiplicativos de dichas cantidades me cambian el sentido de la desigualdad

$$0 < 5 < 8, \Rightarrow \frac{1}{5} > \frac{1}{8}$$

1.2.2. INTERVALOS. Un intervalo es otra forma de representar un conjunto de números, en el cual basta con nombrar entre un corchete ó paréntesis al número menor y al mayor. Quedando representado así todo el conjunto de números que se encuentran entre estos dos números.

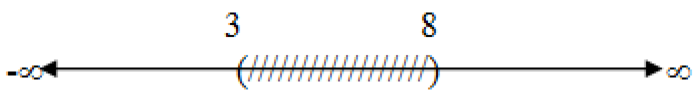
(a, b)

Extremo izquierdo. Extremo derecho.

CLASES DE INTERVALOS

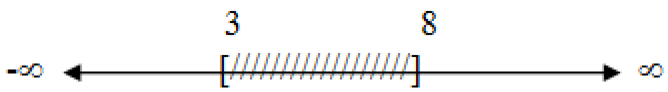
- **Intervalos abiertos.** Son aquellos intervalos en los cuales los extremos derecho e izquierdo no pertenecen al conjunto de números que representa un intervalo. Esta forma de intervalos se representa de la siguiente forma: (a,b)

Ejemplo 2. El conjunto $A = \{x / 3 < x < 8\}$, contiene todos los números reales comprendidos entre 3 y 8, pero no incluye ni el 3 ni el 8. Se denota (3,8) y se represente gráficamente:



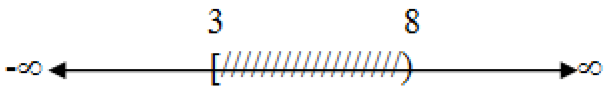
- **Intervalos cerrados.** Son aquellos intervalos en los cuales los extremos derecho e izquierdo si pertenecen al conjunto de números que representa el intervalo. Esta forma de intervalos se representa de la siguiente forma : [a, b]

Ejemplo 3. El conjunto $B = \{x / 3 \leq x \leq 8\}$, contiene todos los números reales comprendidos entre 3 y 8, incluyendo al 3 y al 8. Se denota [3, 8] y se representa gráficamente:



- **Intervalos semiabiertos o semicerrados.** Son aquellos intervalos en los cuales los extremos derecho o izquierdo pertenecen al conjunto de números que representa el intervalo, pero no ambos extremos a la vez. Esta forma de intervalos se representa de la siguiente forma: (a, b] o [a, b).

Ejemplo 4. El conjunto $C = \{x / 3 \leq x < 8\}$, contiene todos los números reales comprendidos entre 3 y 8, incluye al 3 y no incluye al 8. Se denota [3,8) y se representa gráficamente:



Ejemplo 5. Resolver la desigualdad $1 + x < 7x + 5$

Solución: La desigualdad dada se cumple para algunos valores de x, pero para otros no. Resolver una desigualdad significa determinar el conjunto de números x para los cuales la desigualdad es cierta. A este conjunto se le llama conjunto de solución. Primeramente sumamos -1 de ambos miembros de la desigualdad (usando la Regla 1 con $c = -1$):

$$1 + x + (-1) < 7x + 5 + (-1) \Rightarrow x < 7x + 4$$

Luego se suma - 7x de ambos miembros (Regla 1 con $c = -7x$):

$$x + (-7x) < 7x + 4 + (-7x) \Rightarrow -6x < x$$

Ahora multiplicamos ambos miembros por - 1/6 [Regla 4 con c = - 1/6]

$$-6x.\left(\frac{-1}{6}\right) > 4.\left(\frac{-1}{6}\right) \Rightarrow x > -\frac{2}{3}$$

Todos estos pasos se pueden seguir en sentido inverso, así que el conjunto solución está formado por todos los números mayores que $-\frac{2}{3}$.

En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo $(-\frac{2}{3}, \infty)$.

Ejemplo 6. Resolver las desigualdades $4 \leq 3x - 2 < 13$.

Solución: En este caso, el conjunto solución consta de todos los valores de x que satisfacen ambas desigualdades. Aplicando las reglas de las desigualdades, vemos que las desigualdades siguientes son equivalentes:

$4 \leq 3x - 2 < 13$; $\quad 6 \leq 3x < 15$ (se suman 2)

$2 \le x < 5$ (Se dividen entre 3). Por lo tanto, el conjunto solución es $[2{,}5)$.

Ejemplo 7. Resolver $2x+1 \le 4x-3 \le x+7$

Solución: En este caso, lo primero es resolver las desigualdades por separado.

$2x+1 \le 4x-3$ y $4x-3 \le x+7$

$4 \le 2x$ y $3x \le 10$; $\Rightarrow 2 \le x \quad y \quad x \le \frac{10}{3}$

Puesto que x debe satisfacer ambas desigualdades, $2 \le x \le \frac{10}{3}$

De modo que el conjunto solución es el intervalo cerrado $\left[2, \frac{10}{3}\right]$.

Ejemplo 8. Hallar la intersección de los conjuntos solución de las desigualdades:

$-3 \le 2-5x$ y $2-5x \le 12$

Solución: $-3 \le 2-5x \le 12 \Rightarrow -3-2 \le 2-5x-\cancel{2} \le 12-\cancel{2}$

$-5 \le -5x \le 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{-5}{-5} \ge \frac{-5x}{-5} \ge \frac{10}{-5} \Rightarrow 1 \ge x \ge -2$,

$\Rightarrow -2 \le x \le 1$ Solución**:** [-2, 1]

1.3. DESIGUALDADES DE 2° O MÁS.

Cuando la desigualdad es de 2º grado o más, procedemos así:

a. Desigualamos a cero.

b. Tratamos de factorizar.

c. Hallamos las raíces (los valores de la variable donde cada factor se hace "cero"), y los colocamos en la recta numérica.

d. En la recta numérica voy a tener "n" intervalos, de los cuales voy a analizar el que quiera, tomando un valor de la variable "dentro" del intervalo y reemplazando en la desigualdad desigualada a cero y factorizada (preferiblemente tomo el valor de "cero" por ser más fácil de reemplazar).

e. Observo si me resulta una cantidad positiva (+) ó negativa (-) y si satisface la desigualdad; entonces dicho intervalo si satisface o no.

f. Los demás intervalos van a satisfacer intercaladamente: si, no, si...

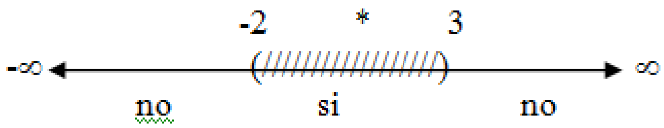
g. La solución es la unión de los intervalos donde están los "si"

Ejemplo 9. Hallar el conjunto solución de la desigualdad $x^2 < x+6$

Solución:

$$x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) < 0 \quad \text{(a)}$$

x = 3 x = -2



Supongamos: x = 0 en (a) ⇒ (-3) (2) < 0; -6 < 0 ¡sí!
Solución: (-2, 3)

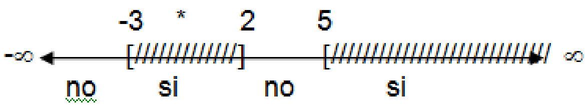
<u>Ejemplo 10.</u> Hallar el conjunto solución de la desigualdad:

$$(x-2)(x+3)(x-5) \geq 0$$

Solución:

$$(x-2)(x+3)(x-5) \geq 0 \quad \text{(a)}$$

x = 2 x = -3 x = 5



Suponiendo x = 0 en (a): ⇒ (-) (+) (-) ≥ 0

(+) ≥ 0 sí; ⇒ solución: [-3,2] U [5,∞**)**

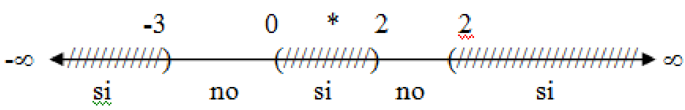
NOTA: si una raíz está repetida, se coloca las veces que éste en la recta numérica; entonces habrá intervalos ficticios.

<u>Ejemplo 11.</u> Resolver la desigualdad $x(x-2)^2(x+3) > 0$

Solución:

$$x(x-2)^2(x+3) > 0 \quad \text{(a)}$$

x = 0 x =2 x = -3



Suponiendo x = 1 en (a): ⇒ (+) $(-)^2$ (+) > 0

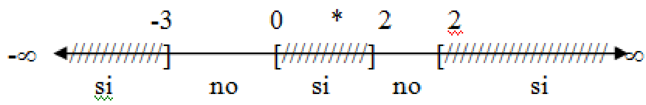
+ > 0 sí ⇒solución: (-∞**,**-3) U (0,2) U (2,∞)

<u>Ejemplo 12.</u> Resolver $x(x-2)^2(x+3) \geq 0$

Solución:

$x(x-2)^2(x+3) \geq 0$ (a)

x = 0 x =2 x = -3



Solución:(-∞,-3] U [0,∞)

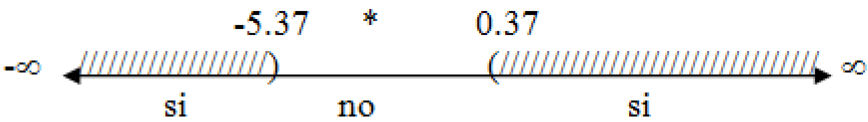
NOTA: Si una desigualdad de 2º grado, después de haberse desigualado a cero no es factorizable; se aplica la fórmula general para hallar las raíces reales (si las hay) y se colocan en la recta numérica. Si resultan raíces imaginarias, la solución son todos los reales, o no hay solución.

Ejemplo 13. Resolver la desigualdad $x^2 + 5x - 2 > 0$

Solución: $x^2 + 5x - 2 > 0 \Rightarrow (x + ?)(x - ?) > 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-5 \pm 5.7}{2} \quad x_1 = 0{,}37, \quad x_2 = -5{,}37$$

$\Rightarrow (x + 5.37)(x - 0.37) > 0$ (a)

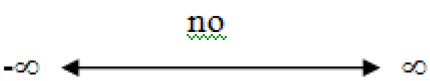


Suponiendo x = 0 en (a): $\Rightarrow$ (+) (-) > 0

(-) > 0 ¡no!, $\Rightarrow$ Solución: (-∞, -5.37) U (0.37, ∞)

Ejemplo 14. Resolver la desigualdad $2x^2 - 3x + 5 < 0$

Solución: $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(5)}}{2(2)} = \ldots i$

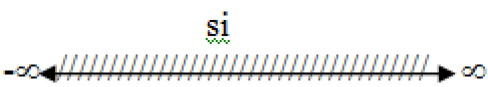


Suponiendo x = 0 en la desigualdad original: 0 – 0 + 5 < 0 ¡no!

$\Rightarrow$ Solución: Ø

Ejemplo 15. Resolver $2x^2 - 3x + 5 \geq 0$

Solución: $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(5)}}{2(2)} = \ldots i$



Suponiendo x = 0 en la desigualdad

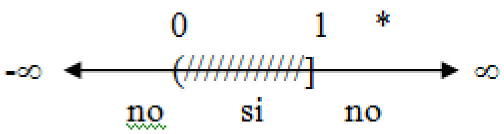
Original: 0 – 0 + 5 ≥ 0 ¡sí! $\Rightarrow$ Solución:{x: x ∈ R}

NOTA: Cuando la desigualdad tiene denominador variable, se desiguala a cero y se hace todo el procedimiento anterior, teniendo en cuenta que una cantidad dividida cero no existe; o sea que en las raíces del denominador los intervalos son abiertos.

<u>Ejemplo 16.</u> Resolver $\dfrac{4x-1}{\underbrace{x}_{x\neq 0}} \leq 3$

Solución: $\dfrac{4x-1}{x} - 3 \leq 0 \Rightarrow \dfrac{4x-1-3x}{x} \leq 0 \Rightarrow \dfrac{\overbrace{x-1}^{x=1}}{\underbrace{x}_{x=0}} \leq 0$ (a)

Suponiendo x = 2 en (a) $\Rightarrow \dfrac{+}{+} < 0$; + < 0 ¡no!

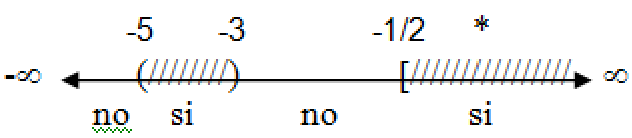


$\Rightarrow$ Solución:(0 ,1]

<u>Ejemplo 17.</u> Resolver $\dfrac{(x-2)}{\underbrace{x+3}_{x\neq -3}} \geq \dfrac{x-4}{\underbrace{x+5}_{x\neq -5}}$

Solución: $\dfrac{x-2}{x+3} - \dfrac{x-4}{x+5} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x^2+5x-2x-10-x^2+4x-3x+12}{(x+3)(x+5)} \geq 0$

$$\Rightarrow \dfrac{\overbrace{4x+2}^{x=-1/2}}{\left(\underbrace{x+3}_{x=-3}\right)\left(\underbrace{x+5}_{x=-5}\right)} \geq 0 \quad \text{(a)}$$



Suponiendo x = 0 en (a): $\dfrac{(+)}{(+)(+)} \geq 0$ ¡sí!$\Rightarrow$ Solución:(-5,-3) U [-½, ∞)

1.4. EL VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número ***a***, denotada con el símbolo **lal**, es la distancia que hay de **a** á 0 en la recta numérica real. Las distancias siempre son positivas o 0, así que tenemos.

$$|\,\mathbf{a}\,| \geq 0 \text{ para todo número } \mathbf{a}$$

Por ejemplo:

$|3| = 3$ $\quad |-3| = 3$ $\quad |0| = 0$ $\quad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$ $\quad |3 - \pi| = \pi - 3$.

En general, tenemos

$$\begin{array}{ll} |\,a\,| = a & \text{si } a \geq 0 \\ |\,a\,| = -a & \text{si } a < 0 \end{array} \qquad (3)$$

(Recuerde que si **a** es negativo, entonces **–a** es positivo).

Recuerde que el símbolo $\sqrt{\ }$ significa "la raíz cuadrada positiva de". Así que $\sqrt{r}$ = .s indica que $s^2 = r$ y $s \geq 0$. Por lo tanto, la ecuación $\sqrt{a^2}$ = **a** no es siempre cierta; sólo lo es cuando **a**≥ 0. Si $a < 0$, entonces **–a**> 0, por lo que $\sqrt{a^2}$ = -**a**. De la ecuación (3), se infiere entonces la ecuación.

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |\,a\,|} \qquad (4)$$

La cuál es válida para todos los valores de **a**.Resumiendo:

$$\sqrt{|f(x)|^2} = |f(x)| = \begin{cases} + f(x), \text{ si } f(x) \geq 0 \\ - f(x), \text{ si } f(x) < 0 \end{cases}$$

1.4.1. PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

Supongamos que en "a" y en "b" son números reales cualesquiera y que "n" es un entero. Entonces:

$$\textbf{1.}\ |a.b| = |a|.|b| \qquad \textbf{2.}\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$$

$$\textbf{3.}\ |a^n| = |a|^n \qquad \textbf{4.} -|a| \leq a \leq |a|$$

Por lo general es muy útil emplear las proposiciones siguientes para resolver ecuaciones o desigualdades que incluyen valores absolutos;

5. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$

cte. o variable; $\Rightarrow$ g(x) $\geq$ 0

6. $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow -g(x) \leq f(x) \leq g(x)$

$\wedge$

Intersección.

7. $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) \vee f(x) \leq -g(x)$

Unión

Desigualdad triangular $\Rightarrow$ $\boxed{|a+b| \leq |a| + |b|}$

Demostración: $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$ (Propiedad 4)

$\Rightarrow -(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$ (Adición)

$\Rightarrow -(|a| + |b|) \leq a + b \leq (|a| + |b|) \Leftrightarrow |a+b| \leq |a| + |b|$ (Propiedad 6)

Nota: cuando se tiene $|f(x)| \leq |g(x)| \Rightarrow \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq 1$

$\Rightarrow \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leq 1$ (Propiedad 2), luego se aplica propiedad 6

Cuando se tiene $|f(x)| \geq |g(x)| \Rightarrow \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} \geq 1 \Rightarrow \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \geq 1$ (propiedad 2), luego se aplica propiedad 7

Ejemplo 18. Resolver $|2x+5| = -3$

Solución: no hay solución.

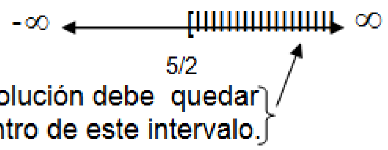
Ejemplo 19. Resolver $|2x+5| = 3$

2x + 5 = 3 $\Rightarrow$ x = -1

Solución: $|2x+5| = 3 \Leftrightarrow$ 2x + 5 = -3 $\Rightarrow$ x = -4

<u>Ejemplo 20.</u> Resolver $|3x-3| = 2x-5$

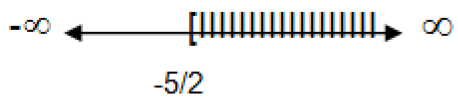
Solución: $2x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5/2$



$$|3x-3| = 2x-5 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x-3 = 2x-5 \Rightarrow x = -2 \\ 3x-3 = -2x+5 \Rightarrow x = 8/5 \end{array} \right\}$$

No satisfacen: no están dentro del intervalo $x \geq 5/2$ $\rightarrow$ No hay solución.

<u>Ejemplo 21.</u> Resolver $|3x-3| = 2x+5$



Solución: $2x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5/2$

$$|3x-3| = 2x+5 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x-3 = 2x+5 \Rightarrow x = 8 \\ 3x-3 = -2x-5 \Rightarrow x = -2/5 \end{array} \right\}$$

Satisfacen el intervalo $x \geq -5/2$

<u>Ejemplo 22.</u> Resolver $|x-3| \leq 2$

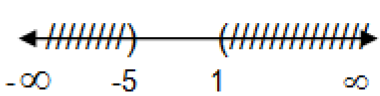
Solución: $|x-3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x-3 \leq 2 \Rightarrow -2+3 \leq x-3+3 \leq 2+3$

$\Rightarrow 1 \leq x \leq 5$ Solución: $x \in [1,5]$

<u>Ejemplo 23.</u> Resolver $|x+2| > 3$

Solución: $|x+2| > 3 \Leftrightarrow x+2 > 3 \vee x+2 < -3$

$x > 1 \vee x < -5$



Solución: $x \in (-\infty,-5) \cup (1,\infty)$

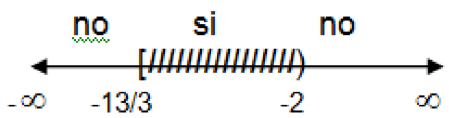
<u>Ejemplo 24.</u> Resolver $\left|\dfrac{2x-3}{x+2}\right| \geq 5$

Solución: $\left|\dfrac{2x-3}{x+2}\right| \geq 5 \Leftrightarrow \dfrac{2x-3}{x+2} \geq 5$ o $\dfrac{2x-3}{x+2} \leq -5$

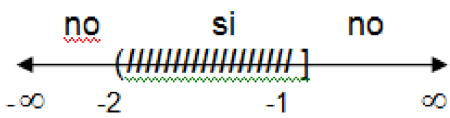
$\Rightarrow \dfrac{2x-3}{x+2} - 5 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{2x-3-5x-10}{x+2} \geq 0$ o $\dfrac{2x-3}{x+2} + 5 \leq 0 \Rightarrow \dfrac{2x-3+5x+10}{x+2} \leq 0$

$\dfrac{-3x-13}{x+2} \geq 0$ (a) ó $\dfrac{7x+7}{x+2} \leq 0$ (b)

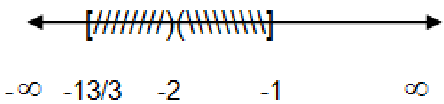
x = -13/3, x = -2 ; x = -1, x = -2



U



Supongamos: x = 0 en (a) $\rightarrow \dfrac{-}{+} \geq 0$ no; x = 0 en (b) $\rightarrow \dfrac{+}{+} \leq 0$ ¡no!.



Solución: $x \in \left[-\dfrac{13}{3}, -2\right) \cup \left(-2, -1\right]$

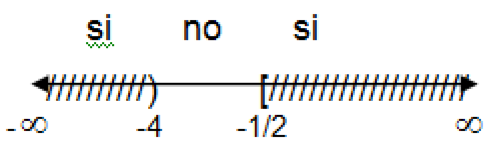
<u>**Ejemplo 25.**</u> Resolver $|x-3| \leq |x+4|$

Solución: $|x-3| \leq |x+4| \Rightarrow \dfrac{|x-3|}{|x+4|} \leq 1 \Rightarrow \left|\dfrac{x-3}{x+4}\right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \dfrac{x-3}{x+4} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \dfrac{x-3}{x+4}$

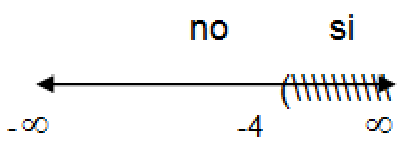
$\wedge \dfrac{x-3}{x+4} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{x-3}{x+4} + 1 \wedge \dfrac{x-3}{x+4} - 1 \leq 0$

$\dfrac{2x+1}{x+4} \geq 0$ (a) $\wedge$ $\dfrac{-7}{x+4} \leq 0$ (b)

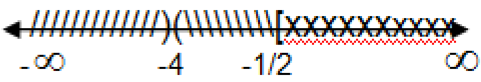
X= -1/2, x = -4 ; x = -4



$\cap$



Supongamos: x = 0 en (a) $\rightarrow \dfrac{+}{+} \geq 0$ sí; x = 0 en (b) $\rightarrow \dfrac{-}{+} \leq 0$ sí.



Solución: $x \in [-1/2, \infty)$

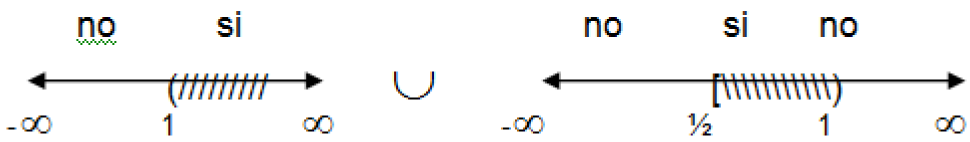
Ejemplo 26. Resolver $|x| \geq |x-1|$

Solución: $\dfrac{|x|}{|x-1|} \geq 1 \Rightarrow \left|\dfrac{x}{x-1}\right| \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1} \geq 1 \vee \dfrac{x}{x-1} \leq -1$

$\dfrac{x}{x-1} - 1 \geq 0 \vee \dfrac{x}{x-1} + 1 \leq 0$

$\dfrac{1}{x-1} \geq 0$ (a) $\vee$ $\dfrac{2x-1}{x-1} \leq 0$ (b)

x = 1 x = 1/2 x = 1



Supongamos: x = 0 en (a) $\rightarrow \dfrac{+}{-} \geq 0$ no; x = 0 en (b) $\rightarrow \dfrac{-}{-} \leq 0$ ¡no!

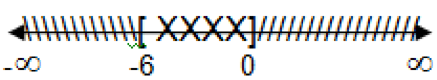
Solución: $x \in [1/2, \infty)$ **Nota:** En la desigualdad original x =1 satisface

Ejemplo 27. Resolver $|2x+3| \geq x-3$

Solución: $|2x+3| \geq x-3 \Leftrightarrow 2x+3 \geq x-3 \vee 2x+3 \leq -x+3$

$x \geq -6 \quad \vee \quad 3x \leq 0$

$x \geq -6 \quad \vee \quad x \leq 0$



Solución: $x \in R$

Ejemplo 28. Describir y dibujar las regiones dadas por los siguientes conjuntos:

(a) {(x, y)/x ≥ 0} ; **(b)** {(x, y)/y = 1} **(c)** {(x, y)/ I y I <1}

Solución:

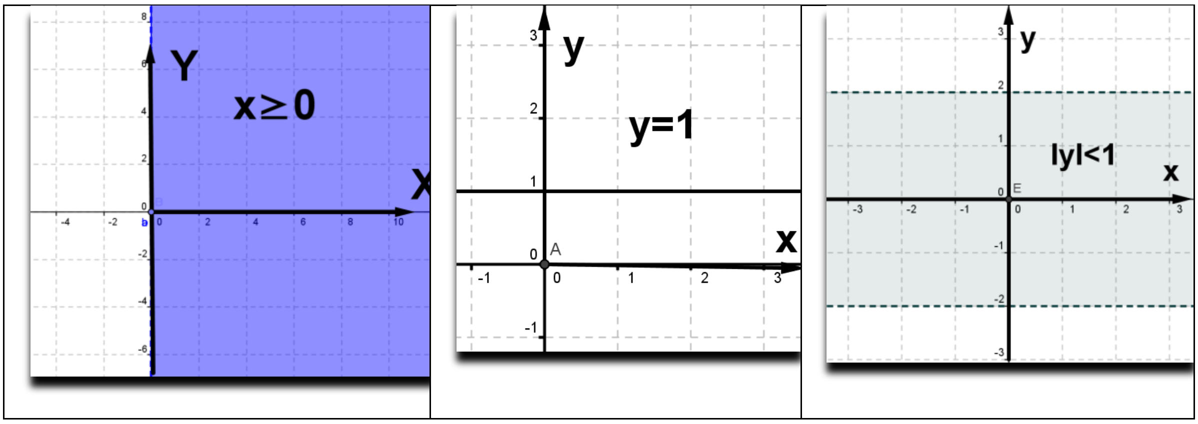
(a). Los puntos cuyas abscisas son 0 o positivas se encuentran en el eje Y o la derecha de él. Figura a.

(b). El conjunto de puntos cuyas ordenadas es igual a 1 es una recta horizontal situada una unidad arriba del eje X. Figura b.

(c). Recuerde que I y I < 1 si y sólo si –1 < y <1.

La región dada está formada por los puntos del plano cuyas ordenadas están entre –1 y 1. Por lo tanto, la región consta de todos los puntos comprendidos entre (pero no en) las rectas horizontales

Y = 1 y Y = -1. (Estas rectas se muestran con trazo interrumpido en la figura c. Para indicar que los puntos pertenecientes a ellas no forman parte del conjunto).



1.5. EJERCICIOS PROPUESTOS

En los ejercicios 1 a 6 reescriba cada expresión sin emplear el símbolo de valor absoluto.

1. $|5-23|$ R/ 18 **2.** $|-\pi|$ R/ π **3.** $|\sqrt{5}-5|$ R/ $5-\sqrt{5}$

4. $|x-2|$ si x < 2 R/ 2 – x **5.** $|x+1|$ R/ $|x+1| = \begin{cases} x+1 \text{ para } x \geq -1 \\ -x-1 \text{ para } x < -1 \end{cases}$

6. $|x^2+1|$ R/ $x^2 + 1$

Resuelva las siguientes desigualdades dadas en los ejercicios 7 al 23 en términos de intervalos e ilustre los conjuntos solución en la recta numérica real.

7. $2x+7>3$ R/ $(-2,\infty)$ **8.** $1-x\leq 2$ R/ $[-1,\infty)$

9. $2x+1<5x-8$ R/ $(3,\infty)$ **10.** $-1<2x-5<7$ R/ $(2,6)$

11. $0\leq 1-x<1$ R/ $(0,1]$ **12.** $4x<2x+1\leq 3x+2$ R/ $\left[-1, \tfrac{1}{2}\right)$

13. $1-x\geq 3-2x\geq x-6$ R/ $[2,3]$ **14.** $(x-1)(x-2)>0$ R/ $(-\infty,1)\cup(2,\infty)$

15. $2x^2+x\leq 1$ R/ $[-1,1/2]$ **16.** $x^2+x+1>0$ R/ $(-\infty,\infty)$

17. $x^2<3$ R/ $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ **18.** $x^3-x^2\leq 0$ R/ $(-\infty,1]$

19. $x^3 > x$ R/ $(-1,0)\cup(1,\infty)$ **20.** $\frac{1}{x} < 4$ R/ $(-\infty,0)\cup(1/4,\infty)$

21. $\frac{4}{x} < x$ R/ $(-2,0)\cup(2,\infty)$ **22.** $\frac{2x+1}{x-5} < 3$ R/ $(-\infty,5)\cup(16,\infty)$

23. $\frac{x^2-1}{x^2+1} \geq 0$ R/ $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

24. La relación entre las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit está dada por C = 5/9 (F – 32), en donde C es la temperatura en grados Celsius (o centígrados) y F es la temperatura en grados Fahrenheit. ¿Qué intervalo de la escala Celsius corresponde a la gama de temperatura $50 \leq F \leq 95$?

R/ $10 \leq C \leq 35$

25. Cuando el aire seco se desplaza hacia arriba se dilata y se enfría a razón de aproximadamente 1 ºC por cada 100 m de elevación hasta aproxim. 12 Km.

a. Si la temperatura a nivel del suelo es 20 ºC, obtenga una fórmula para la temperatura correspondiente a la altura *h*.R/ T = 20 – 10 *h*. $0 \leq h \leq 12$

b. ¿Qué gama de valores de la temperatura se puede esperar si un avión despega y alcanza una altura máxima de 5 Km? R/ $-30^0 C \leq T \leq 20^0 C$

Resuelva la ecuación dada para determinar x en cada uno de los ejercicios:

26. $|2x| = 3$ R/ $\pm\frac{3}{2}$ **27.** $|x+3| = |2x+1|$ R/ $2, -\frac{4}{3}$

Resuelva cada una de las desigualdades dadas en los ejercicios 28 al 34.

28. $|x| < 3$ R/ $(-3,3)$ **29.** $|x-4| < 1$ R/ $(3,5)$

30. $|x+5| \geq 2$ R/ $(-\infty,-7]\cup[-3,\infty)$ **31.** $|2x-3| \leq 0.4$ R/ $[1.3, 1.7]$

32. $1 \leq |x| \leq 4$ R/ $[-4,-1]\cup[1,4]$ **33.** $|x| > |x-1|$ R/ $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$

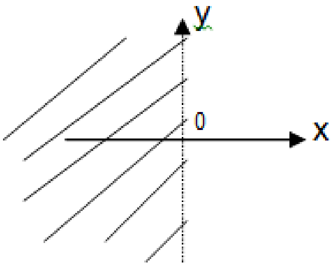
34. $\left|\frac{x}{2+x}\right| < 1$ R/ $(-1,\infty)$

En los ejercicios dibuje la región dada en el plano XY.

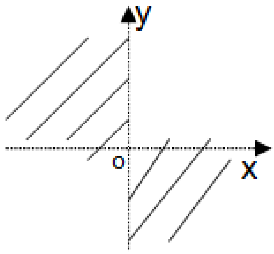
35. $\{(x,y)/\, x < 0\}$ **36.** $\{(x,y)/\, xy \leq 0\}$ **37.** $\{(x,y)/\ |x| \leq 2\}$

38. $\{(x,y)/\, 0 \leq y \leq 4 \ y\ x \leq 2\}$ **39.** $\{(x,y)/\ 1+x \leq y \leq 1-2x\}$

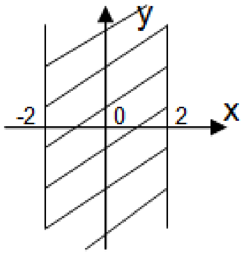
Respuestas/35.



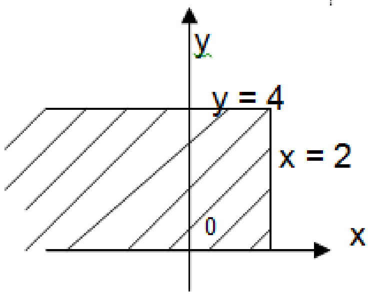
36.



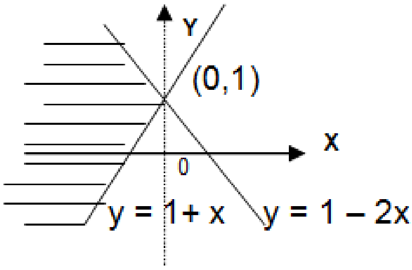
37.

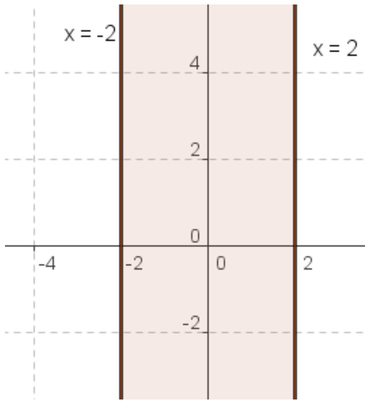


38.



39.





CAPITULO II: RELACIONES Y FUNCIONES

OBJETIVOS

- Representar gráficamente información dada mediante una tabla de valores.
- Representar gráficamente una función a partir de una expresión analítica sencilla.
- Determinar el dominio y rango de funciones reales.
- Dada la gráfica de una relación , establecer si la relación es funcional.
- Dadas dos funciones, hallar la función suma, la función producto, la función cociente y la función compuesta.
- Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática: gráfica, lógica, algebraica, con el fin de comunicarse de manera precisa y rigurosa.
- Utilizar técnicas para obtener datos sobre situaciones problema variados y representar dicha información en forma gráfica y numérica y formarse juicios sobre la misma.
- Desarrollar en el estudiantes capacidad de diferenciar representaciones gráficas de las funciones y los fenómenos sociales.

DIAGNÓSTICO

Grafique las siguientes ecuaciones: a) $y=-\frac{2}{3}x+3$

b) $2x-3y+6=0$

c) $4x+3=0$

d) $5y-3=0$

e) $3x^2+2x-3y+5=0$

f) $3x^2+3y^2+12x-18y=-27$

g) $9x^2+4y^2-18x+16y-11=0$

h) $9x^2-4y^2-18x-16y-43=0$

2.1. FUNCIONES

El concepto de función es una de las ideas fundamentales en matemáticas. Casi cualquier estudio que se refiera a la aplicación de las matemáticas a problemas prácticos o que requiera el análisis de datos empíricos emplea este concepto matemático.

Una función expresa la idea de que una cantidad depende o está determinada por otra. Los ejemplos siguientes aclaran ésta idea:

1. El área de un círculo depende de la longitud de su radio. Si se conoce la longitud de su radio, podemos determinar el área. $\boxed{A = \pi R^2}$
   $\Rightarrow$ A=f(R).
2. El costo unitario de producir cualquier artículo, depende del número de artículos producidos. $\Rightarrow$ Cu = f(x).
3. Las prestaciones otorgadas por el sistema de seguridad social de un país, depende de su tasa de desempleo.
4. El poder adquisitivo de la moneda depende del índice del costo de la vida.
5. $\boxed{U=I-C}$: Utilidad = Ingreso – Costos.
   Pero si "x" es el número de artículos que produce y vende una empresa; y los ingresos dependen de "x", o sea que I es función de "x" (I = g(x)); y los costos también dependen de "x", o sea que C es función de "x" (C=h(x)); entonces las utilidades también dependen de "x"; es decir: U = I – C, $\Rightarrow$ U = g(x) – h(x), $\Rightarrow$ U = f(x).
   https://www.youtube.com/watch?v=wcaknwkIVhM

2.2. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Una función de X en Y denotada por:

f: X$\rightarrow$Y es una regla que se asigna a cada elemento x$\in$X una única y$\in$Y (cuando cada elemento del conjunto de partida tiene una imagen y sólo una).

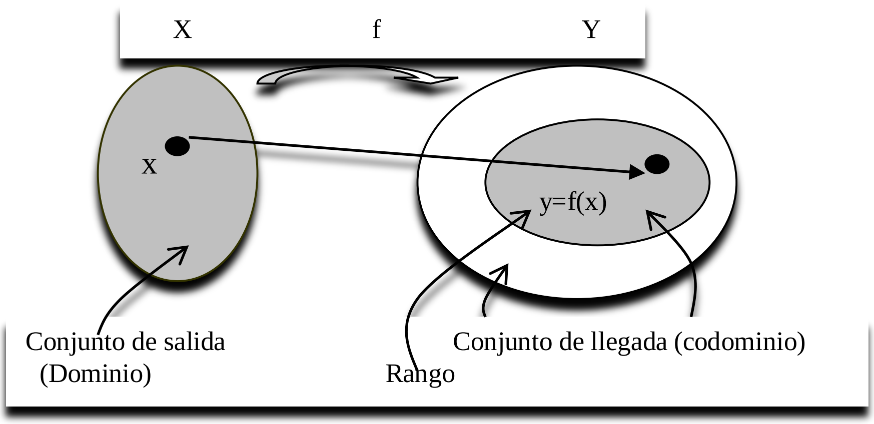
De esta definición podemos concluir que las condiciones impuestas a una función debe ampliarlas sólo al conjunto X (conjunto de partida); es decir:

- ✓ En X no puede sobrar elementos. Todos tienen que estar relacionados con algún elemento del conjunto Y.
- ✓ Cada elemento del conjunto X sólo puede relacionarse con uno y sólo uno de Y.
- ✓ "y" es imagen de "x"

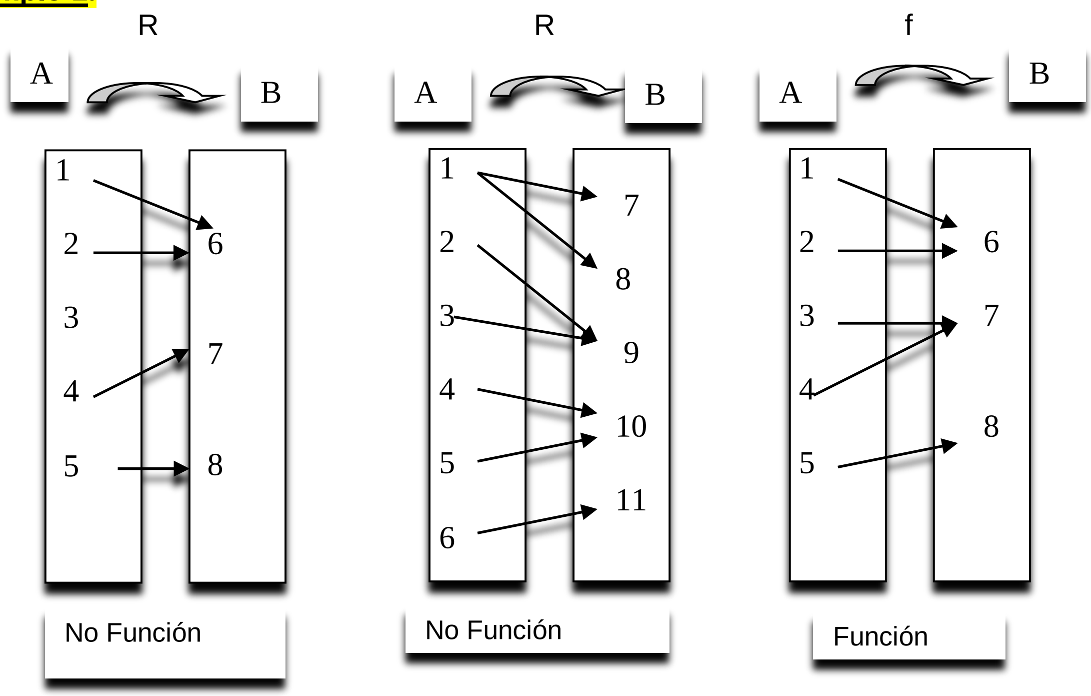
Dominio: Son los elementos del conjunto de salida que están relacionados.

Rango: Son los elementos del conjunto de llegada que son "imágenes".

Codominio: El codominio de una función son todos los elementos del conjunto de llegada, así estén o no estén relacionados con algún elemento del conjunto de partida.



Ejemplo 1.



("3" no tiene imagen) ("1" tiene dos imágenes)

2.3. ELEMENTOS DE UNA FUNCION

2.3.1. DOMINIO. El dominio de una función son todos los elementos del conjunto de partida que están relacionados con los elementos del conjunto de llegada (B). O sea que el dominio de una función es todo el conjunto A.

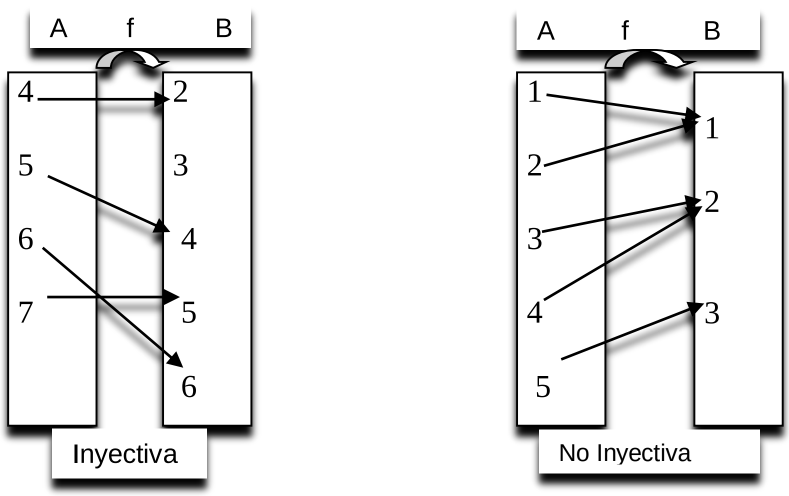
2.3.2. CODOMINIO. El codominio de una función son todos los elementos del conjunto de llegada (B) así estén o no estén relacionados con algún elemento del conjunto de partida (A).

2.3.3. RANGO. El rango o conjunto imagen de una función es el conjunto formado por aquellos elementos de (B) que estén relacionados al menos con un elemento del conjunto A.

2.4. TIPOS DE FUNCIONES

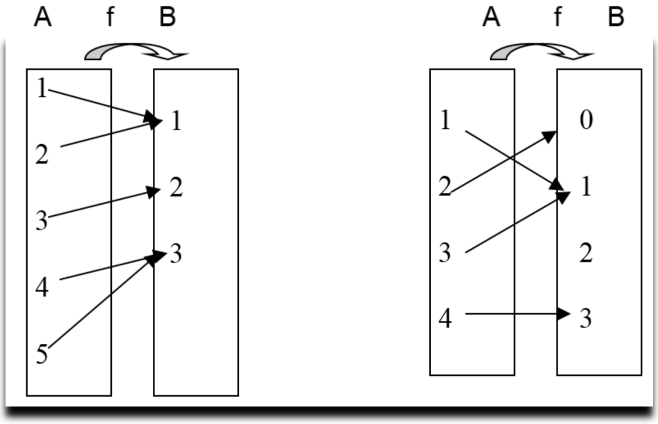
2.4.1. FUNCIONES INYECTIVAS. Una función es inyectiva o "uno a uno" si y solo si cada elemento del Rango es imagen de un solo elemento del Dominio.

Ejemplo 2.



2.4.2. FUNCIONES SOBREYECTIVAS. Una función es sobreyectiva o simplemente "sobre", si todo elemento de B es imagen de por lo menos un elemento de A, o sea, el Rango es igual al Codominio.

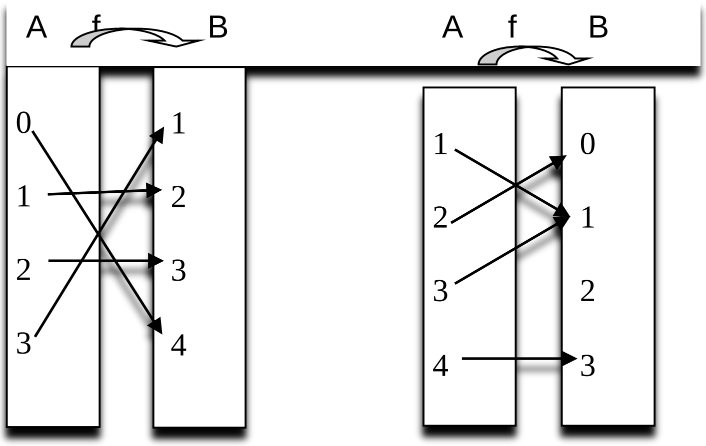
Ejemplo 3.



Sobreyectiva no sobreyectiva

2.4.3. FUNCIONES BIYECTIVAS. Una función es Biyectiva si y solo si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo 4.

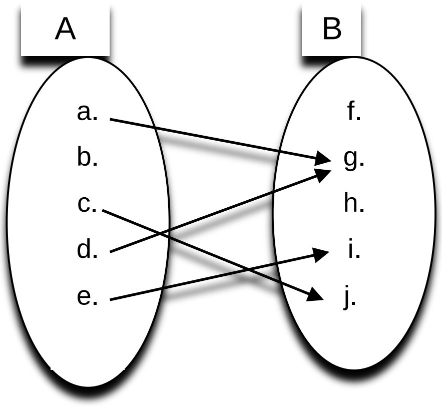


Biyectiva No Biyectiva

Ejemplo 5: En los siguientes ejercicios hallar dominio y rango; cuáles son funciones o relaciones; si son funciones, que tipo de funciones:

Soluciones:

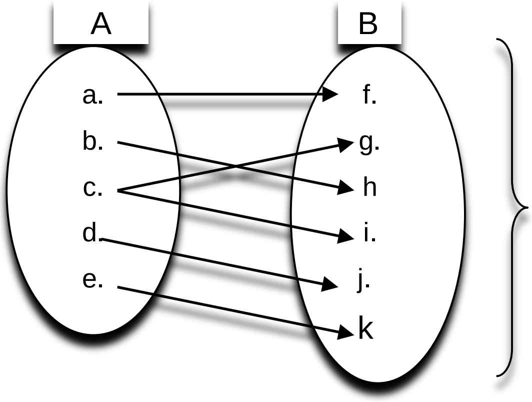
a.



"Relación", porque "b" no tiene imagen.
D = {a,c,d,e}

R = {g,i,j}

b.

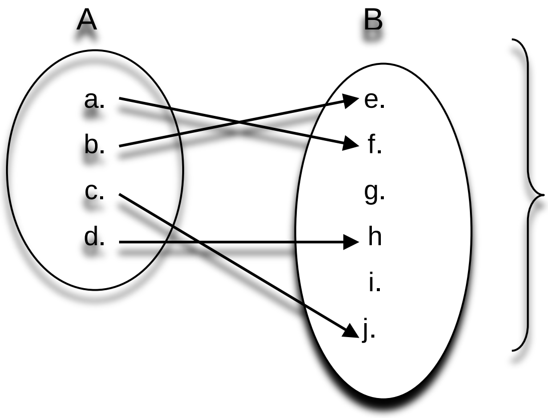


"Relación", porque "c" tiene dos imágenes.

D = {a,b,c,d,e}

R = {f,g,h,i,j,k}

c.

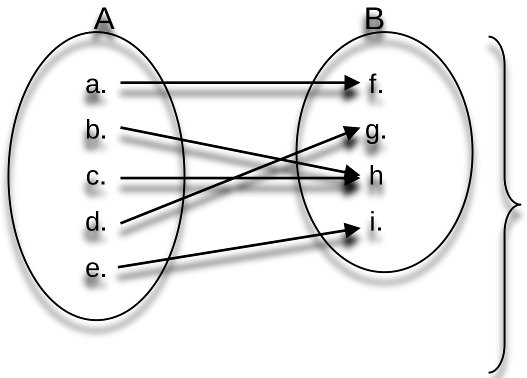


Función "inyectiva"

D = {a,c,d,b} = A

R = {f,e,h,j}

d.

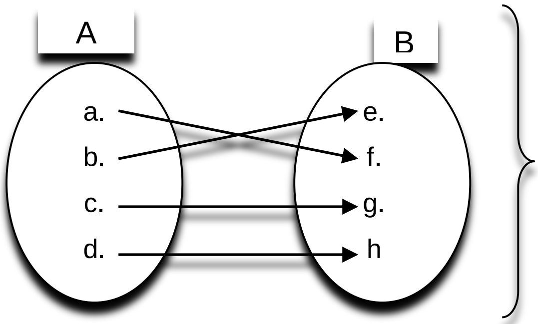


Función "sobreyectiva"

D = {a,b,c,d,e} = A

R = {f,g,h,i} = B

e.

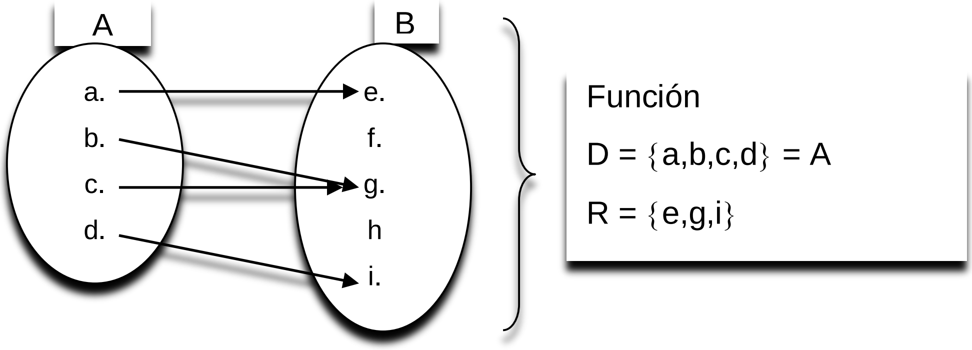


Función "biyectiva"

D = {a,b,c,d} = A

R = {e,f,g,h} = B

f.

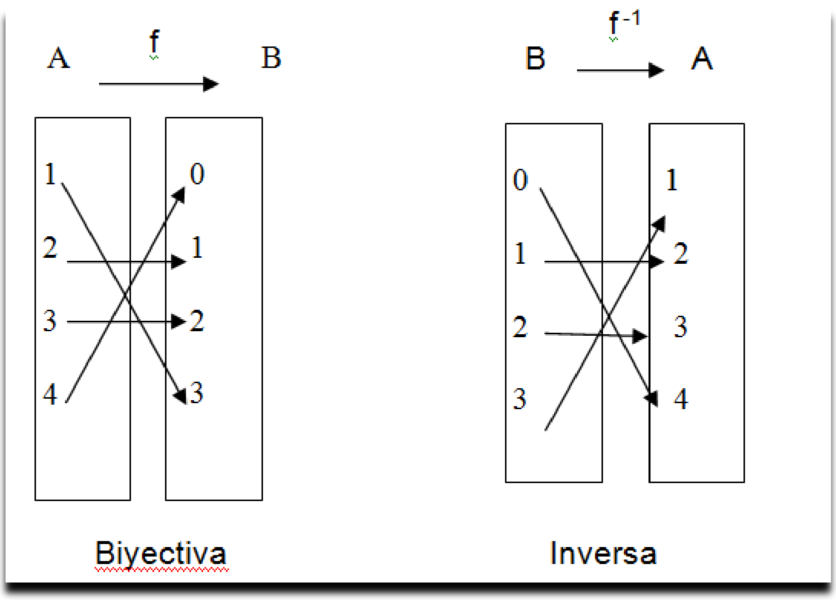


https://www.youtube.com/watch?v=YQNLFc2JAIA

2.5. OTROS TIPOS DE FUNCIONES

2.5.1. FUNCIÓN INVERSA. Si la función *f*: A→B es biyectiva, entonces definiremos su función inversa f^{-1}: B→A de la siguiente manera: Para todo "y" en B existe solamente un "x"∈ A, tal que f^{-1} (y) = x. Para que una función tenga inversa, debe ser biyectiva

Ejemplo 6.



2.5.2. FUNCIÓN PAR. Se dice que una función es par si al cambiar la "x" por "-x", la función no cambia; es decir, es simétrica con respecto al eje "y". f(-x)=f(x) (Mirar pág. 248) Para que una función sea par, basta con que todos los exponentes de "x" sean pares.

Ejemplo 7. Sea $f(x) = y = 2x^6 - 7x^4 - 8$, cambiamos x por –x; nos va quedando $f(-x) = y = 2(-x)^6 - 7(-x)^4 - 8$; Por lo tanto $f(-x) = 2x^6 - 7x^4 - 8$, (La función no cambio, luego es par)

2.5.3. FUNCIÓN IMPAR. Se dice que una función es impar si al cambiar la "x" por "-x" y "y" por "-y", la función no cambia; o lo que es lo mismo, f(-x)=-f(x); es decir, es simétrica con respecto al origen. (Mirar pág. 248)

Para que una función sea impar, debe cumplir una condición necesaria, más no suficiente, y es que todos los exponentes de "x" sean impares.

Ejemplo 8. **A.** Sea $f(x) = y = 2x^5 - 7x^3 - 8$ ¿Será impar?

Veamos: $-y = 2(-x)^5 - 7(-x)^3 - 8;\quad nos\ va\ quedando\ -y = -2x^5 + 7x^3 - 8$

Multiplico por -1: $y = 2x^5 - 7x^3 + 8 \Rightarrow$ (La función cambio, luego no es impar)

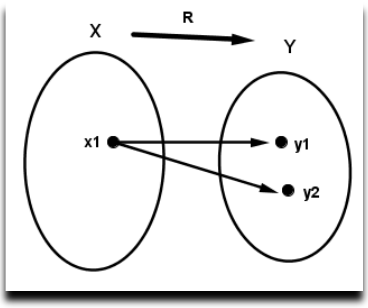
B. Sea $f(x) = y = -4x^3 + 2x^9$ ¿Será impar?

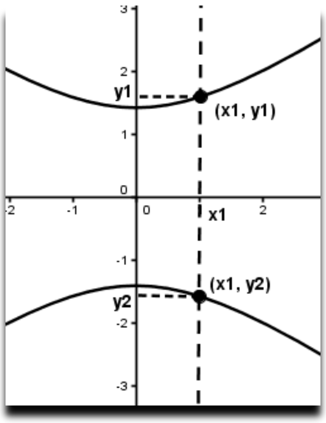
Veamos: $-y = -4(-x)^3 + 2(-x)^9;\quad nos\ va\ quedando\ -y = 4x^3 - 2x^9$

Multiplico por -1: $y = -4x^3 + 2x^9 \Rightarrow$ (La función no cambio, luego es impar)

https://www.youtube.com/watch?v=XRLR9iBRTps

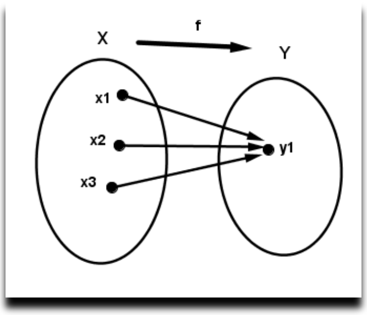
Criterio de la Recta Vertical

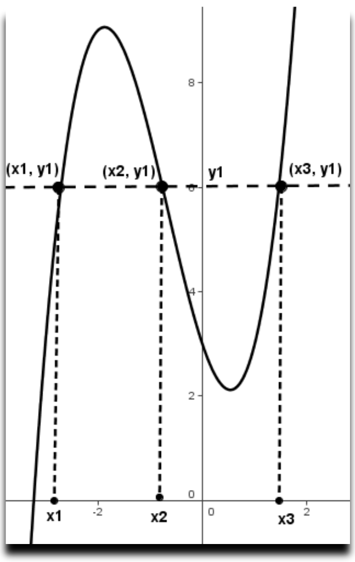




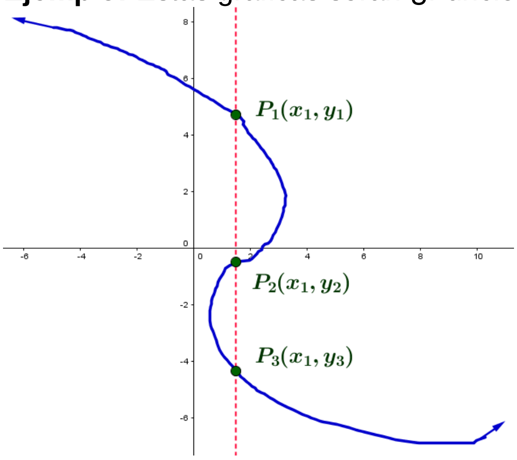
Toda vertical me debe cortar la gráfica sólo en un punto como máximo para que sea función.

Criterio de la Recta Horizontal: Si al trazar una horizontal me corta la curva en dos partes ó más, la función (si es función), no será inyectiva.

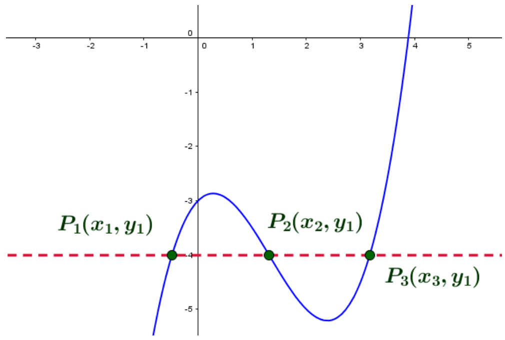




Ejemplo: Estas gráficas serán ¿Función o Relación?



Relación



Función

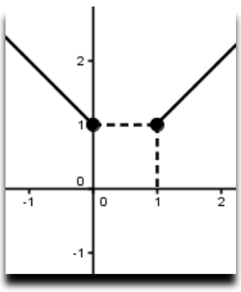
Ejemplo 9. Decir cuáles son funciones ó relaciones, y que tipo de funciones; y decir cuál es el dominio y cuál el rango.

Tener en cuenta para este ejercicio la siguiente condición:

x∈*X* ⊆/*R* → y ∈/*R* y = *f*(x)

Conjunto de partida dado gráficamente.

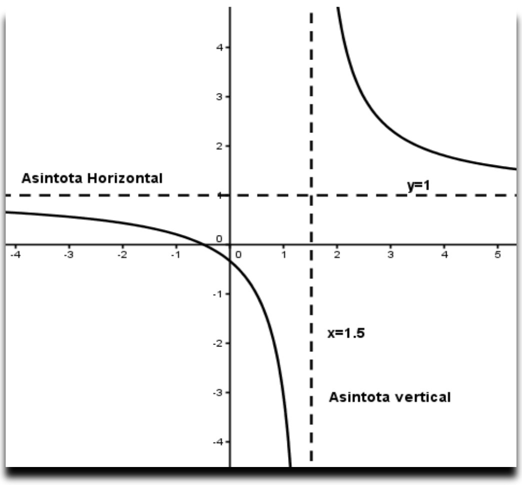
a)



"y" es una función de "x"

$$D = \{x / x \leq 0 \cup x \geq 1\}$$
$$R = \{y / y \geq 1\}$$

b)

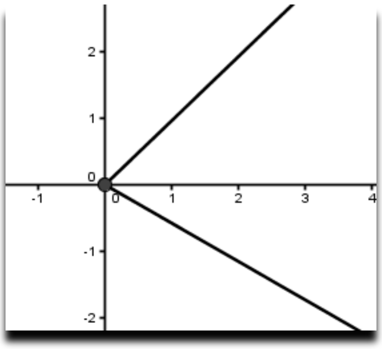


Función Inyectiva

D = {x: x ≠ 1.5}
R = {y: y ≠ 1}

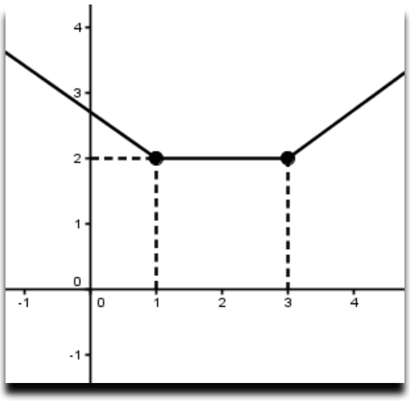
https://www.google.com.co/search?q=asintotas+de+una+funcion+matematica&oq=As%C3%ADntotas+en+una+funci%C3%B3n+matematica&aqs=chrome.1.69i57j0.14861j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8

c)



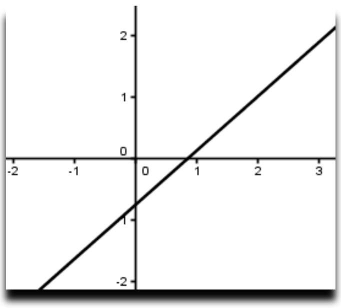
"y" no es función de "x"
D = { x: x≥ 0 }
R = { y ∈ R }

d)



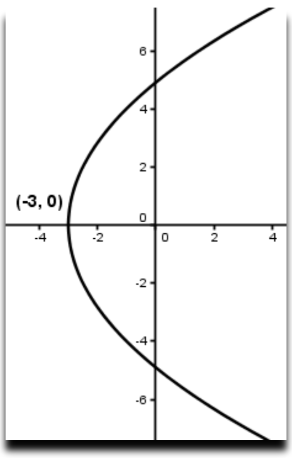
"Y" es una función de "x"
D = {x ∈ R}
R = {y : y ≥ 2 }

e)



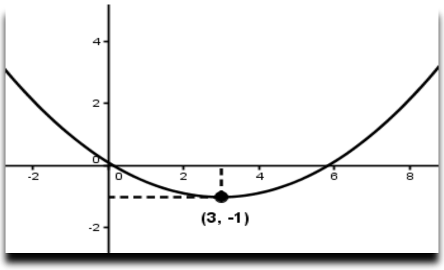
Función biyectiva
D = { x ∈ R }
R = { y ∈ R }

f)



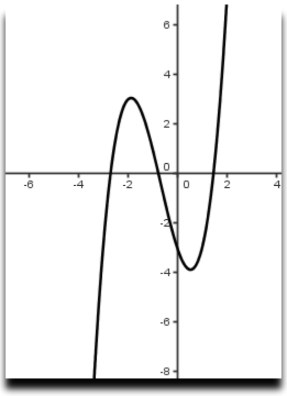
"y" no es función de "x"
D = { x : x ≥ -3 }
R = { y : y ∈ R }

g)



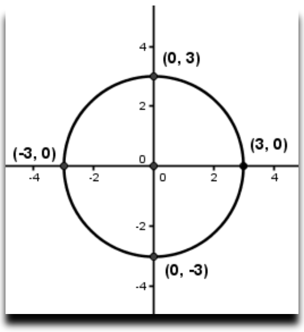
Función
D = { x ∈ R }
R = { y : y ≥ -1}

h)



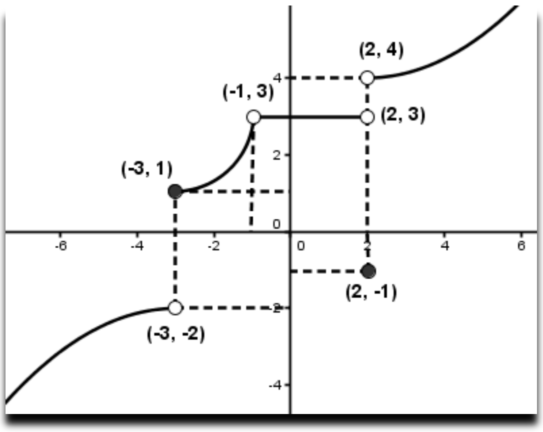
Función "Sobre"
D = { x ∈ R }
R = { y ∈ R }

i)



"y" no es una función de "x"
D = { x : -3 ≤ x ≤ 3}
R = { y : -3 ≤ y ≤ 3}

j)



función
D = { x∈R: x ≠ -1}

R =y∈(-∞, -2) U [-1, -1] U [1, 3] U(4, ∞)

https://www.youtube.com/watch?v=17IiXAKfGIY

http://www.youtube.com/watch?v=13CrhVINhzs&feature=related

https://www.youtube.com/watch?v=bIt68aRzGxo&feature=fvwp&NR=1

2.5.4. LA FUNCIÓN POLINÓMICA.

$$\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

donde "*n*" es un entero no negativo y los coeficientes a_i, i = 0, 1, . . ., *n* son números reales.

$$f(x) = \underbrace{3}_{\text{coeficiente principal}}\overset{\text{grado } 5}{x^5} - 4x^3 - 3x + \underbrace{8}_{\text{término constante}}$$

es una función polinomial de grado 5.

Los polinomios de grados $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ son, respectivamente,

$f(x) = a$, **función constante**,

$f(x) = ax + b$, **función lineal**,

$f(x) = ax^2 + bx + c$, **función cuadrática**,

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, **función cúbica**.

La función constante $f(x) = 0$ se denomina **polinomio cero**.

Calculo de una Variable. Zill Ed. 4ta

Ya sabemos que cada una de las expresiones siguientes es un polinomio en la variable x:

- $4x^5 + 7x^4 – 3x^3 + 2x – 1$
- $8x – 7$
- $6x^2 + 9$
- $3/5x^3 + 2x^2 – 3$
- $8/7$

A cada uno de estos polinomios le podremos asignar una función:

f: Re $\longrightarrow$ Re. Cada una de estas funciones se denomina función Polinómica, y cada una de ellas puede identificarse por el exponente máximo o grado que contenga la variable, así:

- $4x^5 + 7x^4 – 3x^3 + 2x – 1$ (Quinto Grado)
- $8x – 7$ (Primer Grado o Lineal)
- $6x^2 + 9$ (Segundo Grado o Cuadrática)
- $3/5x^3 + 2x^2 – 3$ (Tercer Grado o Cúbica)
- $8/7$ (Grado Cero o Constante)

La forma de la gráfica de una función lineal es una línea recta y de una función cuadrática es una parábola.

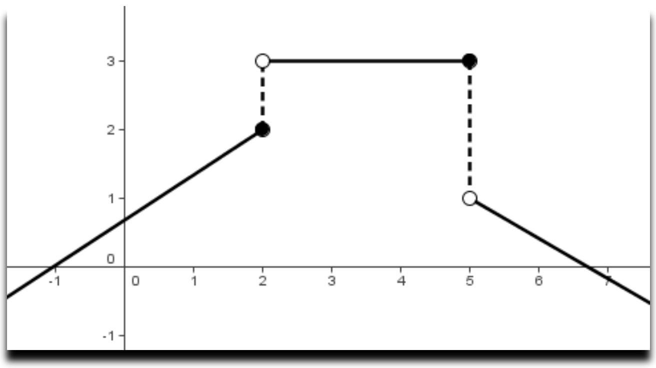
2.5.5. FUNCIONES RACIONALES. Una función racional es aquella que podemos representar como el cociente de dos funciones polinómicas

Ejemplo 10. $\frac{3x^2+5}{x+4}$; $\frac{3x-2}{x^5-3x^2+1}$;

$y=\frac{x}{x^2+5}$, $\quad y=\frac{\overset{\text{polinomio}}{\overset{\downarrow}{x^3-x+7}}}{\underset{\underset{\text{polinomio}}{\uparrow}}{x+3}}$, $\quad y=\frac{1}{x}$	$y=\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$ ←no es un polinomio Por lo tanto no es función racional

Calculo de una Variable. Zill Ed. 4ta

2.5.6. FUNCIONES SEGMENTADAS O POR TRAMOS. En la mayoría de los casos las graficas de las funciones son curvas ininterrumpidas. Sin embago, la grafica de una función no es necesariamente una curva de este estilo. La grafica de una función puede consistir de un número finito de partes desconectadas.



Estas funciones se denominan FUNCIONES SEGMENTADAS O POR TRAMOS.

Ejemplo 11.

$$f(x)=\begin{cases} -2, & si \quad x\in(-\infty;1) \\ x^2, & si \quad -1\le x<2 \\ x, & si \quad 2\le x \end{cases}$$

2.6. ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Dadas dos funciones f y g cualquiera:

- ✓ La Suma de f y g, denotada f + g, es la función definida por:

  (f + g)(x) = f(x) + g(x)

- ✓ La Resta de f y g, denotada f - g, es la función definida por:

  (f - g)(x) = f(x) - g(x)

- ✓ El producto de f y g, denotada f.g, es la función definida por:

  (f .g)(x) = f(x).g(x)

- ✓ La División de f y g, denotada f / g, es la función definida por:

  (f / g)(x) = f(x) / g(x)

Dominio de una combinación aritmética. Al combinar dos funciones aritméticamente es necesario que ambas *f* y *g* estén definidas en el mismo número *x*. Por tanto, el **dominio** de las funciones *f + g*, *f – g* y *f.g* es el conjunto de números reales que son *comunes* a ambos dominios; es decir, el dominio es la *intersección* del dominio de *f* con el dominio de *g*. En el caso del cociente *f.g*, el dominio también es la intersección de los dos dominios, *pero* también es necesario excluir cualquier valor de *x* para el que el denominador *g*(*x*) sea cero. En otras palabras, si el dominio de *f* es el conjunto X_1 y el dominio de *g* es el conjunto X_2, entonces el dominio de

$f+g, f-g$ y fg es $X_1 \cap X_2$, y el dominio de f/g es $\{x | x \in X_1 \cap X_2,\ g(x) \neq 0\}$.

2.7. LA FUNCIÓN COMPUESTA. Si tenemos las funciones f: A→B y g: B→C, denominamos la FUNCIÓN COMPUESTA de f y g a la función: g o f: A→C, definida por:

(g o f)(x) = g[f(x)].

Ejemplo 12. Para cada uno de los pares de funciones que se muestra a continuación, hallar: $(fog)(x)$, $(gof)(x)$, $(fof)(x)$ y $(gog)(x)$.

A. f(x)=ln$x$ y g(x)= e^x

B. f(x)= x^2 y g(x)= $\frac{1}{\sqrt{x}}$

C. f(x)= $\frac{1}{x+1}$ y g(x)= $\frac{x}{x-2}$

D. f(x)= x^2-9 y g(x)= $\sqrt{x+5}$

E. f(x)=tanx^2 y g(x)= $\sqrt{x}$

F. f(x)= $\frac{x+2}{x-1}$ y g(x)= $\frac{x-5}{x+4}$

Solución D:

$(fog)(x)=f(g(x)) = f\left(\sqrt{x+5}\right) = \left(\sqrt{x+5}\right)^2 - 9 = x+5-9 = x-4$

$(gof)(x)= g\left(f(x)\right) = g\left(x^2-9\right) = \sqrt{x^2-9+5} = \sqrt{x^2-4}$

$(fof)(x)= f(f(x)) = f\left(x^2-9\right) = \left(x^2-9\right)^2 - 9 = x^4-18x^2+81-9 = x^4-18x^2+72$

$(gog)(x)= g(g(x)) = g\left(\sqrt{x+5}\right) = \sqrt{\sqrt{x+5}+5}$

Solución F:

$$(fog)(x)=f(g(x)) = f\left(\frac{x-5}{x+4}\right) = \frac{\frac{x-5}{x+4}+2}{\frac{x-5}{x+4}-1} = \frac{\frac{x-5+2x+8}{x+4}}{\frac{x-5-x-4}{x+4}} = \frac{3x+3}{-9} = \frac{3(x+1)}{-9} = \frac{x+1}{-3}$$

$$(gof)(x)= g\left(f(x)\right) = g\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \frac{\frac{x+2}{x-1}-5}{\frac{x+2}{x-1}+4} = \frac{\frac{x+2-5x+5}{x-1}}{\frac{x+2+4x-4}{x-1}} = \frac{-4x+7}{5x-2}$$

$$(fof)(x)= f(f(x)) = f\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \frac{\frac{x+2}{x-1}+2}{\frac{x+2}{x-1}-1} = \frac{\frac{x+2+2x-2}{x-1}}{\frac{x+2-x+1}{x-1}} = \frac{3x}{3} = x$$

$$(gog)(x)= g(g(x)) = g\left(\frac{x-5}{x+4}\right) = \frac{\frac{x-5}{x+4}-5}{\frac{x-5}{x+4}+4} = \frac{\frac{x-5-5x-20}{x+4}}{\frac{x-5+4x+16}{x+4}} = \frac{-4x-25}{5x+11}$$

Ejemplo 13. Cada una de las funciones que se dan a continuación son funciones compuestas. Encontrar las funciones que las componen y comprobar que la composición de dichas funciones es la función compuesta dada.

A. F(x)= $\sqrt[5]{\boldsymbol{x^2-5x+7}}$

B. G(x)= $\boldsymbol{e^{5x-8}}$

C. T(x)= $\boldsymbol{sen^3 x}$

D. $\boldsymbol{Q(t)=9\left(t^2+2t-5\right)^2}$

E. H(x)= $\boldsymbol{sec(x^2-5)+tan(x^2-5)}$

F. P(t)=$\boldsymbol{log(t-5)-(t-5)^2+3^{(t-5)}}$

Solución 4.

$\boldsymbol{A.\ f(x)=\sqrt[5]{x};\quad g(x)=x^2-5x+7;\quad \Rightarrow fog(x)=f\big(g(x)\big)=f(x^2-5x+7)=}$
$\boldsymbol{\sqrt[5]{x^2-5x+7}}$

$\boldsymbol{B.\ f(x)=e^x;\quad g(x)=5x-8;\quad \Rightarrow fog(x)=f\big(g(x)\big)=f(5x-8)=e^{5x-8}}$

$\boldsymbol{C.\ f(x)=x^3;\quad g(x)=senx;\quad \Rightarrow fog(x)=f\big(g(x)\big)=f(senx)=(senx)^3}$

$\boldsymbol{D.\ f(t)=9t^2;\quad g(t)=t^2+2t-5;\quad \Rightarrow fog(t)=f\big(g(t)\big)=f(t^2+2t-5)=}$
$\boldsymbol{9(t^2+2t-5)^2}$

$\boldsymbol{E.\ f(x)=secx+tanx;\quad g(x)=x^2-5;\quad \Rightarrow fog(x)=f\big(g(x)\big)=f(x^2-5)=}$
$\boldsymbol{sec(x^2-5)+tan(x^2-5)}$

$\boldsymbol{F.\ f(t)=logt-t^2+3^t;\quad g(t)=t-5;\quad \Rightarrow fog(t)=f\big(g(t)\big)=f(t-5)=}$
$\boldsymbol{log(t-5)-(t-5)^2+3^{(t-5)}}$

Ejemplo 13.1. Sea f(x) = x^2 + 3, g(x) = x + 1. Calcular (f+g)(x), (f–g)(x), (f.g)(x), (f/g)(x), (gof)(x), (fog)(x), (fof)(x), (gog)(x).

- ✓ (f+g)(x)= (x^2 + 3) + (x + 1) = x^2 + x + 4
- ✓ (f–g)(x)= (x^2 + 3) - (x + 1) = x^2 - x + 2
- ✓ (f.g)(x)= (x^2 + 3)(x + 1) = x^3 + x^2 +3x + 3
- ✓ (f/g)(x)= (x^2 + 3) /(x + 1)
- ✓ (gof)(x)= g(f(x)) = g((x^2 + 3)) = (x^2 + 3) + 1 = x^2 + 4
- ✓ (fog)(x)= f(g(x)) = f(x + 1)) = $(x+1)^2$+3 = x^2+2x+1+3 = x^2+2x+4
- ✓ (fof)(x)= f(f(x)) = f(x^2 + 3) = $(x^2+3)^2$+3 = x^4+6x^2+9+3 = x^4+6x^2+12
- ✓ (gog)(x)= g(g(x)) = g(x+1) = x+1+1 = x+2

Ejemplo 13.2. **a.** Sea $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$. Calcular (f+g)(x), (f–g)(x), (f.g)(x), (f/g)(x)

b. Sea $f(x)=x^2-4$, $g(x)=\sqrt{x}$. Calcular (f+g)(x), (f–g)(x), (f.g)(x), (f/g)(x)

https://www.youtube.com/watch?v=jP1mSfUqpxw&list=PL9SnRnlzoyX05sjBvbujQWjRFjLUOuVxb&index=2

https://www.youtube.com/watch?v=Qw9GTqSv_94&list=PL9SnRnIzoyX05sjBvbujQWjRFjLUOuVxb&index=4

https://www.youtube.com/watch?v=XeluJDX1cZQ&list=PL9SnRnIzoyX05sjBvbujQWjRFjLUOuVxb&index=6

Ejemplo 13.3. Dada la función f (x) = x^2 - 4x + 7, evaluar: a) f (3a), b) f (b-1),

c) $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Solución:

a. $f(3a) = (3a)^2 - 4(3a) + 7 = 9a^2 - 12a + 7$

b. $f(b-1) = (b-1)^2 - 4(b-1)+7 = b^2 - 2b + 1 - 4b + 4 + 7 = b^2 - 6b + 12$

c.
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x)+7-(x^2-4x+7)}{\Delta x}$$
$$= \frac{x^2 + 2x.\Delta x + \Delta x^2 - 4x - 4\Delta x + 7 - x^2 + 4x - 7)}{\Delta x}$$
$$= \frac{\Delta x(2x+\Delta x-4)}{\Delta x} = 2x+\Delta x-4$$

2.8. DOMINIO DE UNA FUNCIÓN. Recordemos: **Dominio**→ son los valores que pueden tomar la "x". Si tenemos y = f(x), debemos tener en cuenta las siguientes limitantes:

1. $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$; ⇒ $g(x) \geq 0$; "n" par

2. $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$; ⇒ $g(x) \neq 0$

3. $f(x) = \log_b g(x)$; ⇒ $g(x) > 0$

4. $f(x)$ = función trigonométrica.

Ejemplo 14. Hallar el Dominio en:

1. $y = f(x) = x^3 + 5x^2 - 3$
2. $y = \sqrt[4]{x^2 - 2x}$
3. $f(x) = \sqrt[6]{x^5 - 13x^3 + 36x}$

4. $y = \ln\left(x^2 - 9\right)$

5. $y = \dfrac{x+2}{x^2 + 2x - 15}$

6. $y = \sqrt[5]{x^5 - 7x^3 + 2x - 1}$

7. $y = \tan x$

8. $y = \cos t$

Soluciones:

1. $D = \{x \in \Re\}$; ya que esta función no está dentro de ninguna de las cuatro limitantes mostrados en el cuadro anterior.

2. Esta función tiene el limitante 1; por lo tanto, la cantidad subradical la hago mayor o igual a cero:
Coloquemos las raíces x=0 y x=2 en la recta real y observamos que hay tres intervalos. Analicemos el intervalo de la mitad; o cualquier otro y supongamos un valor dentro de ese intervalo. Supongamos x=1 y reemplacemos en (a):

$$x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow x\left(x-2\right) \geq 0 \quad (a)$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$x = 0 \quad x = 2$$

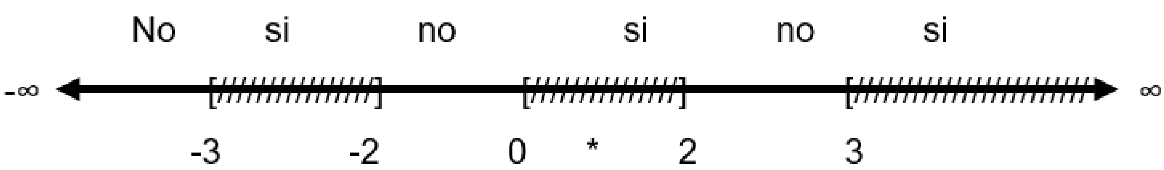
$$(+)(-) \geq 0 \quad no\ satisface \quad \Rightarrow \quad D = x \in (-\alpha, 0] \cup [2, \alpha)$$

3. $f(x) = \sqrt[6]{x^5 - 13x^3 + 36x}$

$$x^5 - 13x^3 + 36x \geq 0 \Rightarrow x(x^4 - 13x^2 + 36) \geq 0 \Rightarrow x(x^2 - 9)(x^2 - 4) \geq 0$$

$$\Rightarrow \underset{x=0}{x}\ \underset{x=3}{(x-3)}\underset{x=-3}{(x+3)}\underset{x=2}{(x-2)}\underset{x=-2}{(x+2)} \geq 0 \quad (a)$$

Supongamos x=1 en (a): (+) (-) (+) (-) (+) ≥ 0 $\Rightarrow (+) \geq 0$ ¡si!

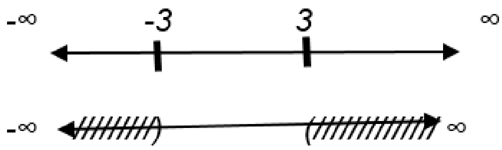


Dominio: x∈ [-3, -2] U [0, 2] U [3, ∞)

$$x^2 - 9 > 0 \rightarrow (x+3)(x-3) > 0 \quad (a)$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$x = -3 \quad x = 3$$

4. Esta función tiene el limitante 3; por lo tanto, la cantidad del logaritmo la hago mayor que cero:

Coloquemos las raíces x=-3 y x=3 en la recta real y observamos que hay tres intervalos. Analicemos el intervalo de la mitad y supongamos un valor dentro de ese intervalo. Supongamos x=0 y reemplacemos en (a):



$$(+)(-) > 0 \quad \textit{no satisface} \qquad \Rightarrow \quad D = x \in (-\alpha, -3) \cup (3, \alpha)$$

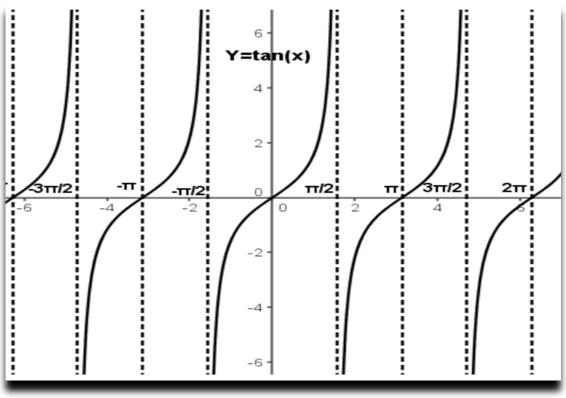
5. Esta función tiene el limitante 2; por lo tanto, el denominador tiene que ser diferente de cero.

$$x^2 + 2x - 15 \neq 0 \rightarrow (x+5)(x-3) \neq 0$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$x \neq -5 \quad x \neq 3$$

$$\Rightarrow \quad D = \{x \in \Re / x \neq -5; 3\}$$

6. $D = \{x \in \Re\}$; Ya que esta función no está dentro de ninguna de los Cuatro limitantes mostradas en el cuadro anterior.

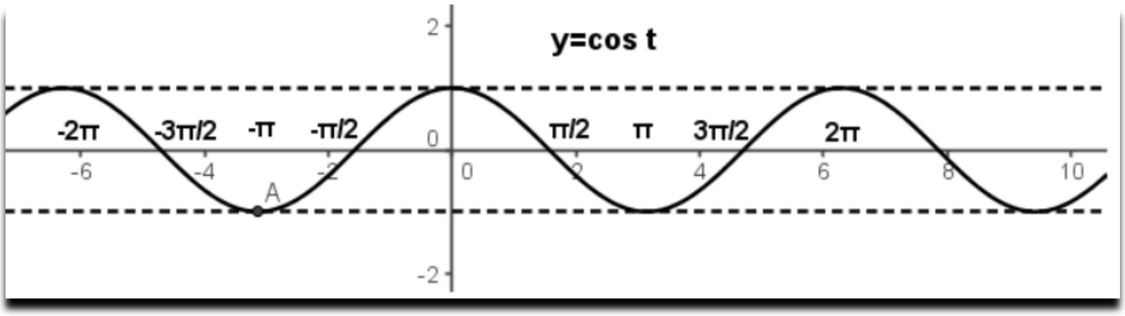
7.



Observamos que hay asíntotas verticales, o sea rectas a las cuales la curva se les acerca muchísimo, pero sin jamás tocarlas. En dichas rectas verticales el dominio no existe.

$D = \{x \in \Re / x \neq \pm\pi/2; \pm 3\pi/2; ...\}$

8.



Observamos que la función no tiene interrupciones; por lo tanto, $D = \{t \in \Re\}$

https://www.youtube.com/watch?v=fSNn8HV809Q

2.9. DOMINIO, GRÁFICA Y RANGO DE UNA FUNCIÓN, Y FUNCIONES POR TRAMOS

Ejemplo 15. Hallar los ceros (reales) de la función: $f(x) = x^3 - x$

Solución: $0 = x^3 - x \Rightarrow 0 = x(x^2 - 1) \Rightarrow 0 = x(x - 1)\ (x + 1)$

$$\underset{x=0}{\downarrow} \quad \underset{x=1}{\downarrow} \quad \underset{x=-1}{\downarrow}$$

2.9.1. ALGUNOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

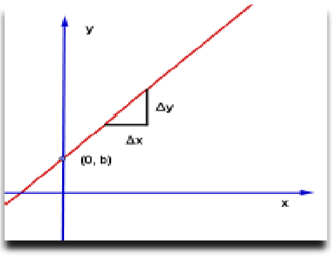
Nota: Recordemos algunos conceptos fundamentales de la Geometría Analítica que son importantes para graficar algunas funciones:

La función lineal: a) $y=mx+b$

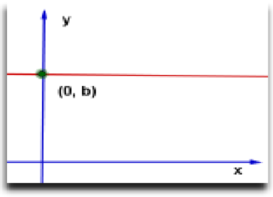
m: pendiente (Inclinación)

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

b: Intercepto con "y"

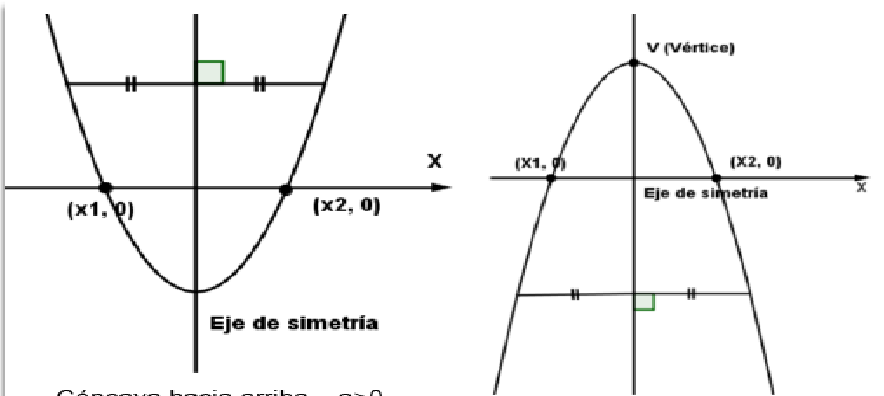


b) $y=b$



La función cuadrática:

$y=ax^2+bx+c\ (a \neq 0)$



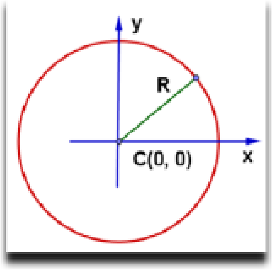
Cóncava hacia arriba. a>0

Cóncava hacia abajo. a<0

La función semicircunferencia:

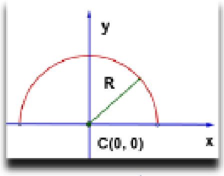
$circunferencia\ con\ centro\ en\ el\ origen$

$del\ plano\ cartesiano\ \rightarrow\ x^2 + y^2 = R^2$

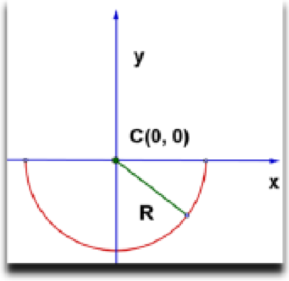


$\Longrightarrow y^2 = R^2 - x^2 \ \longrightarrow\ y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ — función semicircunferencia

a) $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$



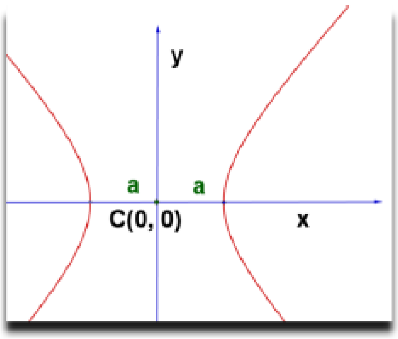
b) $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$



La función semihipérbola:

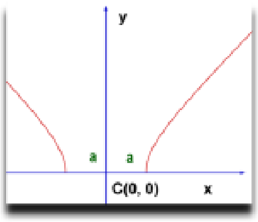
$hipérbola\ con\ centro\ en\ el\ origen$

$del\ plano\ cartesiano\ \rightarrow\ x^2 - y^2 = a^2$

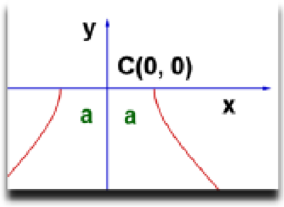


$\Longrightarrow y^2 = x^2 - a^2 \ \longrightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - a^2}$ — función semihipérbola

a) $y = +\sqrt{x^2 - a^2}$



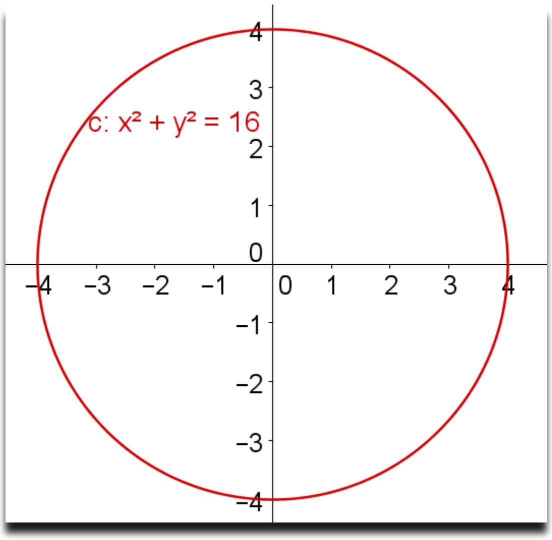
b) $y = -\sqrt{x^2 - a^2}$



Ejemplo 16: Grafique las siguientes ecuaciones: $(a)\ x^2 + y^2 = 16$; $(b)\ \ y = +\sqrt{4 - x^2}$; $(c)\ \ y = -\sqrt{9 - x^2}$; $(d)\ x^2 - y^2 = 1$; $(e)\ \ y = +\sqrt{x^2 - 25}$; $(f)\ \ y = -\sqrt{x^2 - 36}$. Halle el dominio y halle el rango

Soluciones:

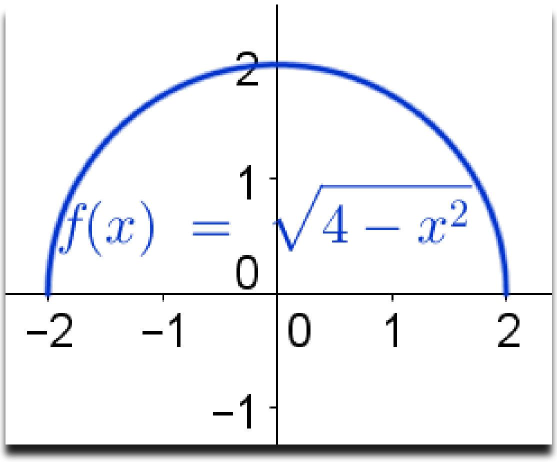
$$(a)\ x^2 + y^2 = 16 \leftarrow R^2 \Longrightarrow R = 4$$



$\mathrm{D} = \mathrm{x} \in [-4, 4]$

$\mathrm{R} = \mathrm{y} \in [-4, 4]$

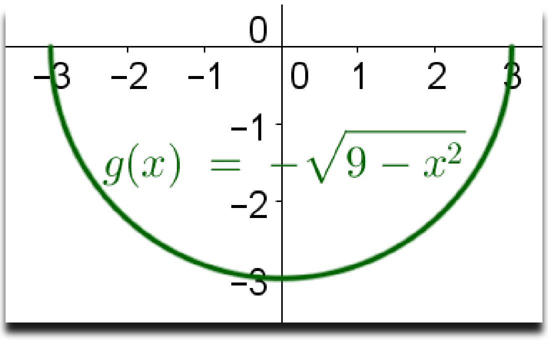
$$(b)\ \ y = +\sqrt{\underbrace{4}_{R^2 \Longrightarrow R=2} - x^2}$$



$\mathrm{D} = \mathrm{x} \in [-2, 2]$

$\mathrm{R} = \mathrm{y} \in [0, 2]$

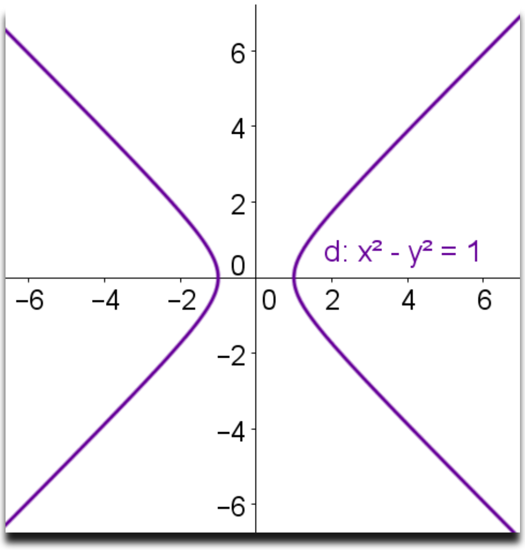
$$(c)\ \ y = -\sqrt{\underbrace{9}_{R^2 \Longrightarrow R=3} - x^2}$$



$\mathrm{D} = \mathrm{x} \in [-3, 3]$

$\mathrm{R} = \mathrm{y} \in [-3, 0]$

$$(d)\ x^2 - y^2 = 1 \leftarrow a^2 \Longrightarrow a = 1$$

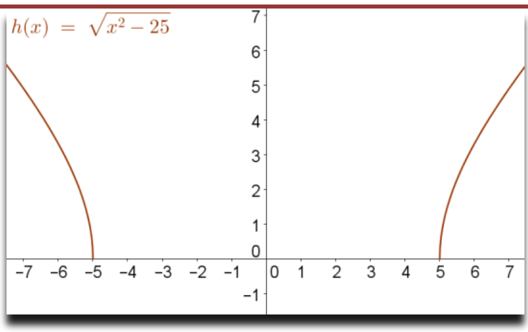


$\mathrm{D} = \mathrm{x} \in (-\infty, -1]U[1,\infty)$

$\mathrm{R} = \mathrm{y} \in (-\infty\,, \infty)$

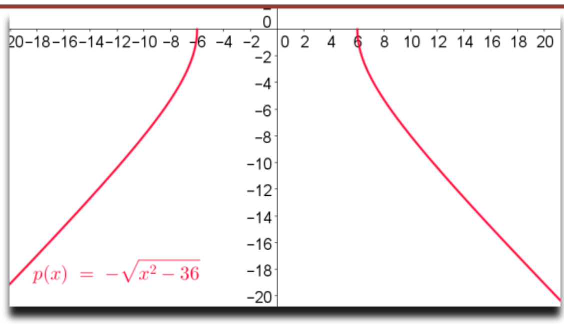
$$(e)\ \ y = +\sqrt{x^2 - \underbrace{25}_{a^2 \Longrightarrow a=5}}$$

$$(f)\ \ y = -\sqrt{x^2 - \underbrace{36}_{a^2 \Longrightarrow a=6}}$$



$D = x \in (-\infty, -5]U[5,\infty)$

$R = y \in [0\,,\infty)$



$D = x \in (-\infty, -6]U[6,\infty)$

$R = y \in (-\infty, 0]$

https://www.youtube.com/watch?v=J0Ixrvqd6kM

2.9.2. EJEMPLOS

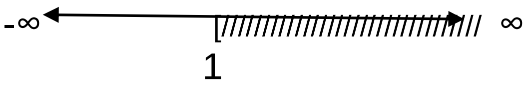
Ejemplo 17. Encuentre, de ser posible, las intersecciones con los ejes "*x*" y "*y*" de las funciones dadas.

$$a)\quad f(x) = x^2 + 2x - 2 \qquad\qquad b)\ f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x}$$

Ejemplo 18. Hallar dominio, graficar y halle el rango:

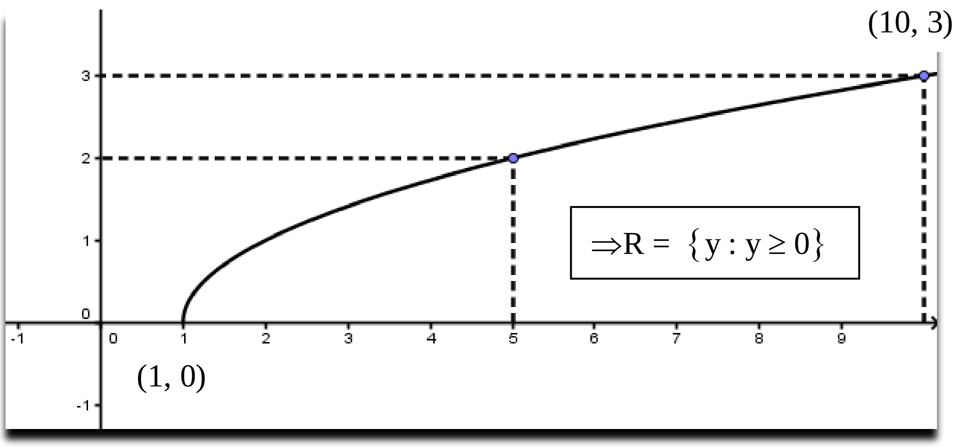
a. $f(x) = \sqrt{x-1}$

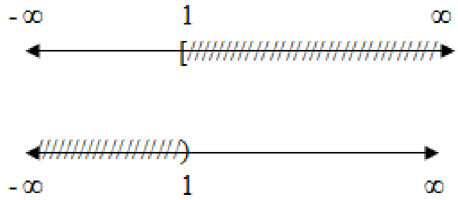
Solución: $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D=\{x \in R / x \geq 1\}$



x	1	5	10	∞
y	0	2	3	∞

Rango → son los valores que puede tomar la "y".





b. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & si \quad x\geq 1\\ 1-x, & si \quad x<1\end{cases}$

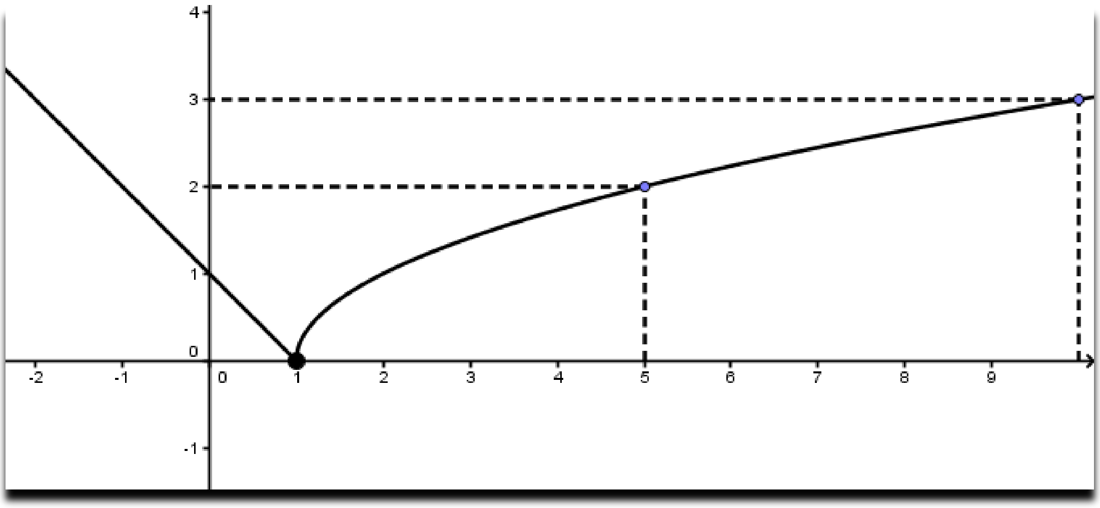
Solución: $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$\boxed{D = \{x: x \in /R\}}$

$\boxed{R = \{y: y \geq 0\}}$

x	1	5	10	1	0	-2
y	0	2	3	0	1	3

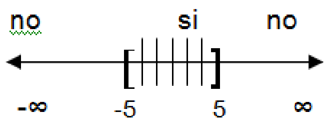
$\sqrt{x-1}$ 1-x



c. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

Solución: $25 - x^2 \geq 0 \Rightarrow (5 - x)(5 + x) \geq 0$ (a)

x=5 x= - 5

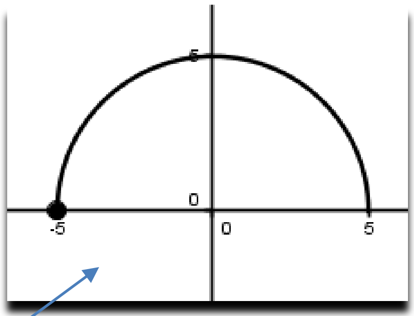


Supongamos: x=0 en (a) $\Rightarrow$ (+) (+) ≥ 0

$\boxed{D = \{x/ -5 \leq x \leq 5\}}$

$\boxed{R = \{y: 0 \leq y \leq 5\}}$

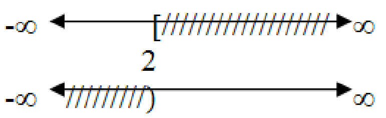
x	-5	-4	-3	0	3	4	5
y	0	3	4	5	4	3	0



O simplemente sabiendo que la función es f (x) = $\sqrt{25 - x^2}$, debemos captar que es una semicircunferencia con centro en el origen y que R^2 = 25, por lo tanto R=5

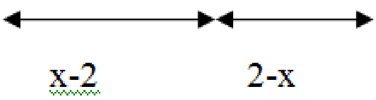
d. f**(x) = |x - 2|**

Solución: $f(x) = |x-2| = \begin{cases} +(x-2), & si \quad x-2 \geq 0 \\ -(x-2), & si \quad x-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x-2, & si \quad x \geq 2 \\ 2-x, & si \quad x < 2 \end{cases}$

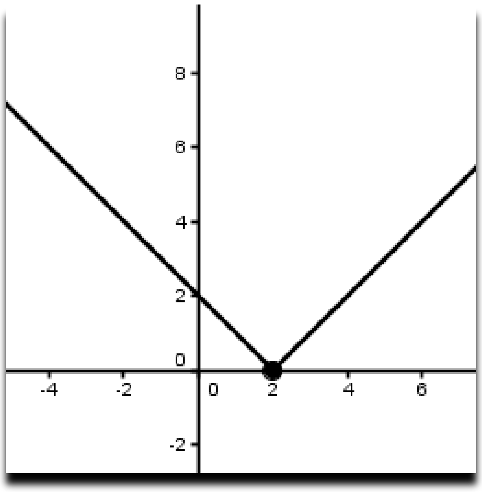


$\Rightarrow$ $\boxed{D = \{x : x \in R\}}$

X	2	4	6	2	0
Y	0	2	4	0	2



$\boxed{R = \{y : y \geq 0\}}$



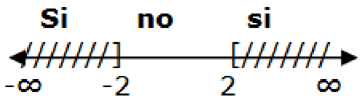
e. f(x) = $\sqrt{x^2 - 4}$

Solución: $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) \geq 0$ (a)

x=2   x=-2

Supongamos: x = 0 en (a) $\Rightarrow$ (-) (+) $\geq$ 0

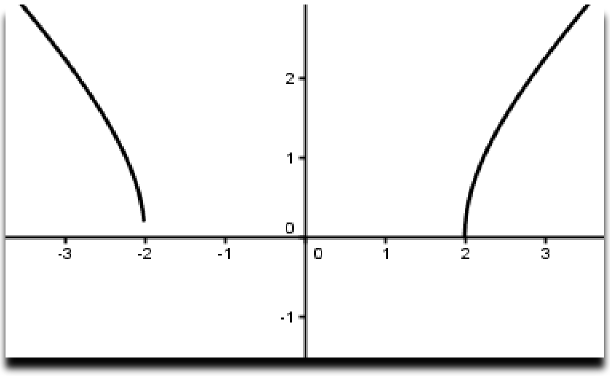
(-) $\geq$ 0, ¡no! $\Rightarrow$



X	-2	-3	-4	2	3	4
Y	0	2.2	3.5	0	2.2	3.5

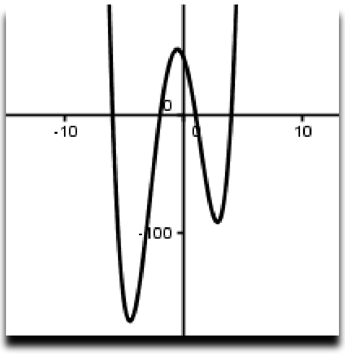
$$\boxed{R = \{\ y/\ y \geq 0\}}$$

O simplemente sabiendo que la función es f(x)= $\sqrt{x^2 - 4}$ debemos captar que es una semihipérbola con centro en el origen y que $a^2 = 4$, por lo tanto a=2

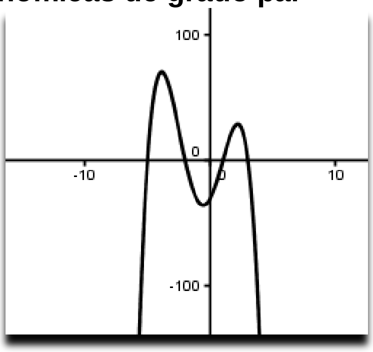


2.9.3. CRITERIO DEL COEFICIENTE DOMINANTE

1. **Graficas de funciones polinómicas de grado par**

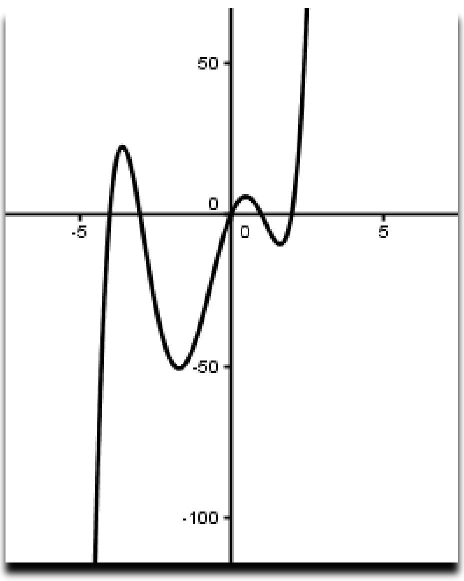


Suben hacia la izquierda y derecha

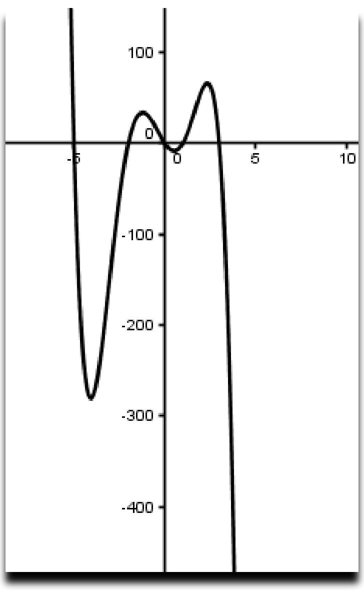


Bajan hacia la izquierda y derecha

2. **Graficas de funciones polinómicas de grado impar.**



Suben a la derecha y baja a la izquierda



Suben a la izquierda y baja a la derecha

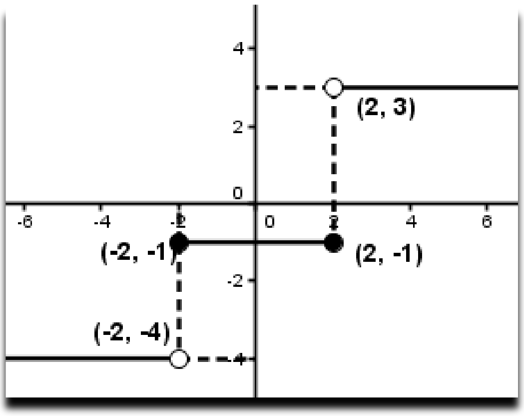
2.9.4. MÁS EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 19. Hallar dominio, gráfica y rango. $y = \begin{cases} -4, & si \quad x < -2 \\ -1, & si \quad -2 \le x \le 2 \\ 3, & si \quad 2 < x \end{cases}$

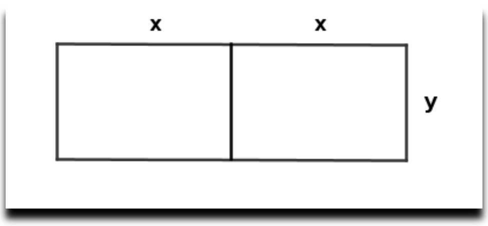
Solución:

D = {x: x ∊ R}

R = {y: y = -1, -4, 3}



Ejemplo 19.1. Un ganadero tiene 200 pies de valla para cerrar dos corrales rectangulares adyacentes (como se muestra en la figura). Expresar el área A de los cercados en función de "x".



Solución: A = 2x y (1), P = 200 = 3y + 4x $\Rightarrow \dfrac{200-4x}{3} = y$ (2)

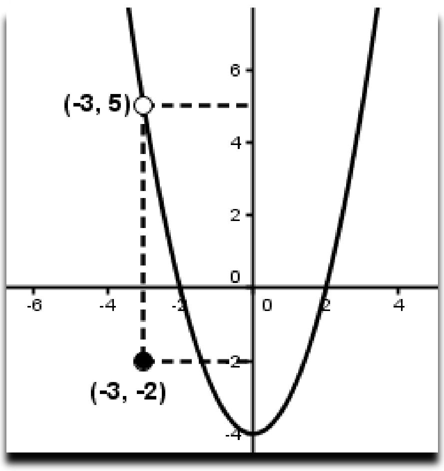
(2) en (1) → $A = 2x\left(\dfrac{200-4x}{3}\right)$

Ejemplo19.2. Hallar dominio, gráfica y rango: $y = \begin{cases} x^2 - 4, & si \quad x \neq -3 \\ -2, & si \quad x = -3 \end{cases}$

Solución: D = {x: x ∊/R}

X	-3	-4	-1	0	2	3	-2
Y	5	12	-3	-4	0	5	0

R = {y/y ≥ -4}



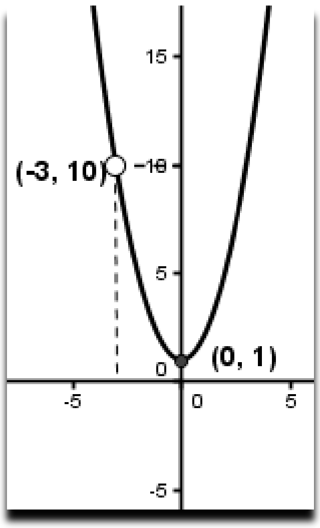
Ejemplo 20. Hallar dominio, rango; y graficar $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 + x + 3}{x+3}$

Solución: $y = \dfrac{x^2(x+3)+(x+3)}{\underbrace{x+3}_{x \neq -3}} = \dfrac{(x+3)(x^2+1)}{(x+3)} = x^2 + 1$

X	-3	-1	0	1	2	3
Y	10	2	1	2	5	10

D = {x : x ≠ -3};

R = { y : y ≥ 1}

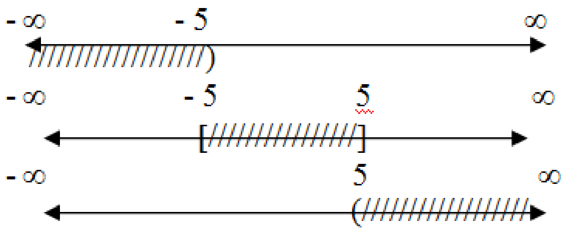


Ejemplo 21. Hallar dominio, graficar y rango en

$$y = \begin{cases} x+5, & si \quad x < -5 \\ \sqrt{25 - x^2}, & si \quad -5 \leq x \leq 5 \\ x-5, & si \quad 5 < x \end{cases}$$

Solución:

$$y = \begin{cases} x+5, & si \quad x < -5 \\ \sqrt{25 - x^2}, & si \quad -5 \leq x \leq 5 \\ x-5, & si \quad 5 < x \end{cases}$$

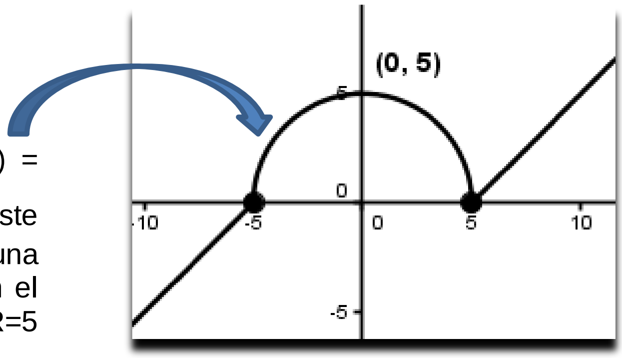


X	-7	-5	-5	-4	-3	0	3	4	5	5	7
Y	-2	0	0	3	4	5	4	3	0	0	2

x+5 $\quad\quad$ $\sqrt{25 - x^2}$ $\quad\quad$ x-5

R = {y: y ∈/R}

Como el segundo tramo es $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, y el dominio de este tramo es $-5 \le x \le 5$; es una semicircunferencia con centro en el origen y que $R^2 = 25$, por lo tanto R=5



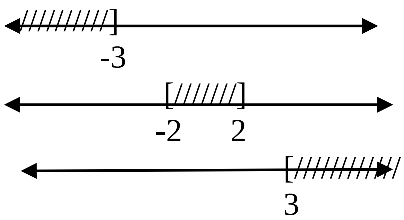
Ejemplo 22. En la siguiente relación:

Encuentre dominio, grafique, y halle el rango.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, \text{si } x \le -3 \\ \sqrt{4 - x^2}, & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x - 4, & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, \text{si } x \le -3 \\ \sqrt{4 - x^2}, & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x - 4, & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$



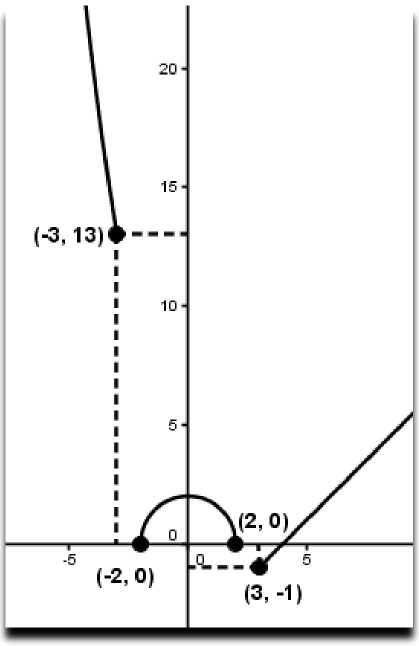
x	-3	-4	-5
y	13	20	29

x	-2	-1	0	1	2
y	0	1.73	2	1.73	0

x	3	5
y	-1	1

Como el segundo tramo es $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, y el dominio de este tramo es $-2 \le x \le 2$; es una semicircunferencia con centro en el origen y que $R^2 = 4$, por lo tanto R=2

Es una función $\boxed{R = y \in [-1, \infty)}$

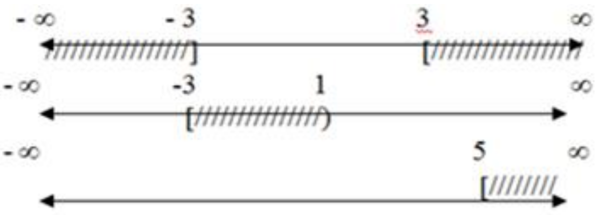


Ejemplo 23. En la siguiente relación; encuentre el dominio, grafique, y halle el rango.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-9}, & \text{si } x \le -3 \text{ u } x \ge 3 \\ 4, & \text{si } -3 \le x < 1 \\ x+4, & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$$

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-9}, & \text{si } x \le -3 \text{ u } x \ge 3 \\ 4, & \text{si } -3 \le x < 1 \\ x+4, & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$$

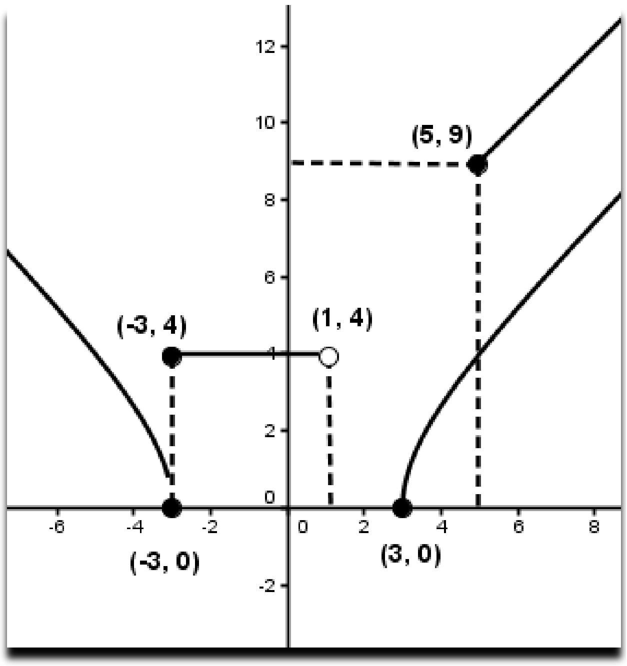


X	-3	-5	-7	3	5	7	5	6
y	0	4	6.3	0	4	6.3	9	10

$D = X \in (-\infty, 1) \cup [3, \infty)$

R = $y \in [0, \infty)$

Como el primer tramo es $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, y el dominio de este tramo es $x \le -3 \; y \; x \ge 3$; es una semihiperbola con centro en el origen y que $a^2 = 9$, por lo tanto a=3

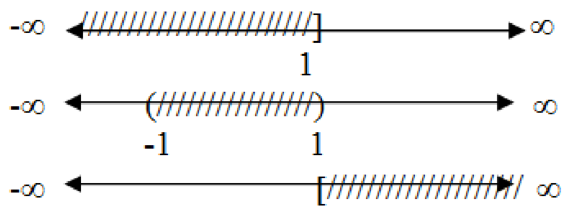


<u>Ejemplo 24</u>. En la siguiente relación; encuentre dominio, grafique, y halle el rango.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ x^3, & \text{si } |x| < 1 \\ 2x, & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Solución:

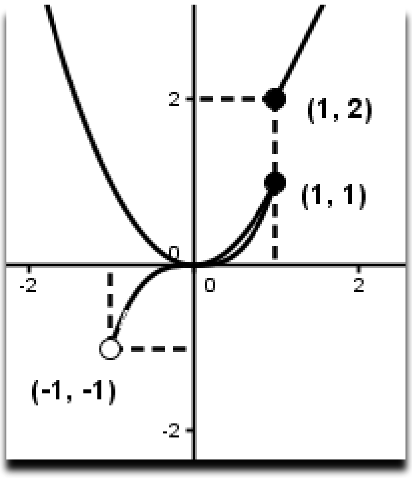
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ x^3, & \text{si } |x| < 1 \\ 2x, & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$



Solución: $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
$\Rightarrow D = \{x/x \in /R\}$

x	1	0	-1	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	1	3	
Y	1	0	1	4	-1	-0.125	0	0.125	1	2	6	

R = $y \in (-1, \infty)$

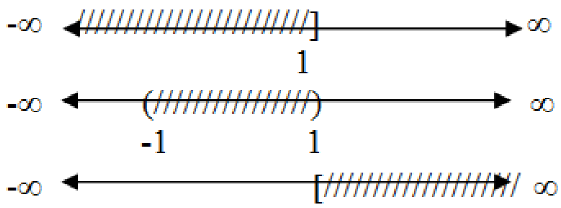


Ejemplo 25. En la siguiente relación; encuentre dominio, grafique, y halle el rango.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^3, & \text{si } |x| < 1 \\ 2x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

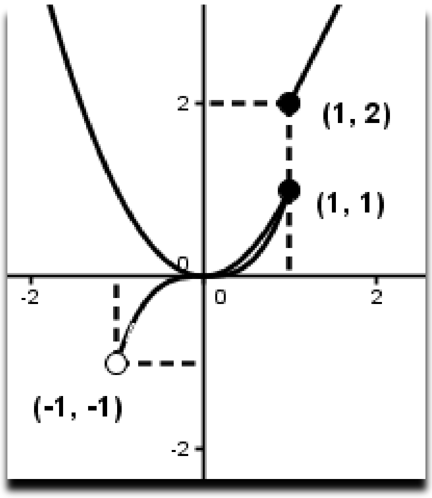
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^3, & \text{si } |x| < 1 \\ 2x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



Solución: $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
$\Rightarrow D = \{x/x \in /R\}$

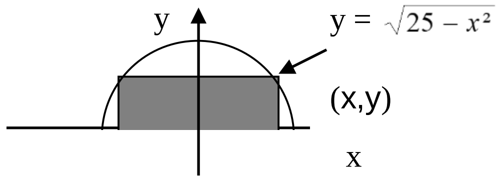
x	1	0	-1	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	1	3	
Y	1	0	1	4	-1	-0.125	0	0.125	1	2	6	

R = $y \in (-1, \infty)$



Ejemplo 26. Un rectángulo está limitado por el eje "x" y el semicírculo

y = $\sqrt{25 - x^2}$ como muestra la figura. Escribir el área "A" del rectángulo como función de "X".



Solución: A = 2x y (1)

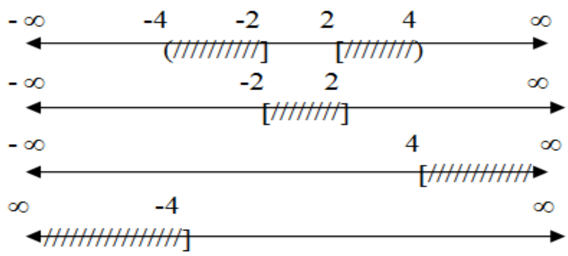
$$y = \sqrt{25 - x^2} \quad (2) \text{ en } (1) \rightarrow \qquad A = 2x\sqrt{25 - x^2}$$

Ejemplo 27. Hallar dominio, graficar, y hallar el rango

$$\Rightarrow y = \begin{cases} \sqrt{x^2-4}, & \text{si} -4 < x \leq -2 \cup 2 \leq x < 4 \\ 3x-2, & \text{si} -2 \leq x \leq 2 \\ -x^2-3, & \text{si } x \geq 4 \\ x^2+2, & \text{si } x \leq -4 \end{cases}$$

Solución:

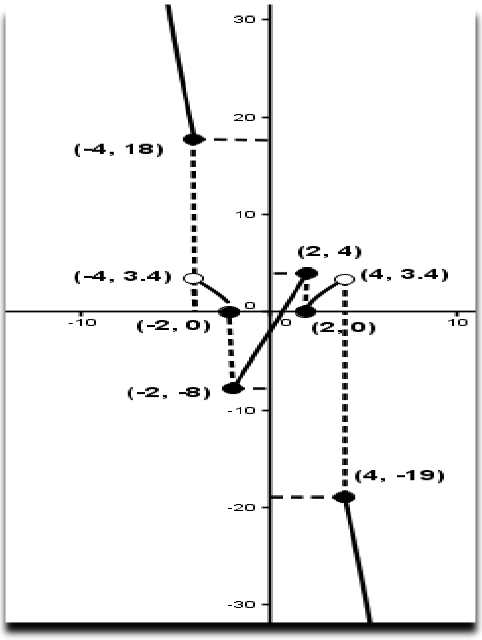
$$\Rightarrow y = \begin{cases} \sqrt{x^2-4}, & \text{si} -4 < x \leq -2 \cup 2 \leq x < 4 \\ 3x-2, & \text{si} -2 \leq x \leq 2 \\ -x^2-3, & \text{si } x \geq 4 \\ x^2+2, & \text{si } x \leq -4 \end{cases}$$



X	±4	±3	±2	-2	2	4	5	6	-4	-5	-6
Y	3.4	2.2	0	-8	4	-19	-28	-39	18	27	38
	$\sqrt{x^2-4}$			$3x-2$		$-x^2-3$			x^2+2		

$D = \{x \in /R\}$

$R = y \in (-\infty, -19] \cup [-8, 4] \cup [18, \infty)$



Ejemplo 28. Hallar dominio, graficar, y hallar el rango $f(x) = \begin{cases} |x+3|, & si\ \ 0 < x < 5 \\ \sqrt{x^3 - 25x} & si -5 \le x \le 0 \cup x \ge 5 \end{cases}$

Solución: $|x+3| = \begin{cases} +(x+3), & \text{si} \quad x+3 \ge 0 \Rightarrow x \ge -3 \\ -(x+3), & \text{si} \quad x+3 < 0 \Rightarrow x < -3 \end{cases}$

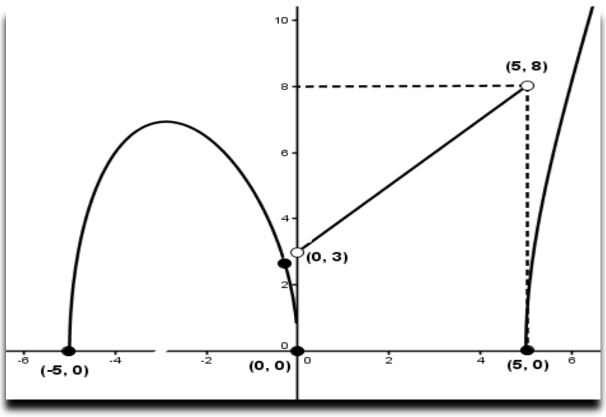
$\Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} x+3, \text{ si } 0 < x < 5 \\ \sqrt{x^3 - 25x}, \text{ si } -5 \le x \le 0 \cup x \ge 5 \end{cases}$

X	0	5	-5	-4	-3	-1	0	5	6	7
Y	3	8	0	6	6.9	4.9	0	0	8.1	13

x+3 $\qquad\qquad \sqrt{x^3 - 25x}$

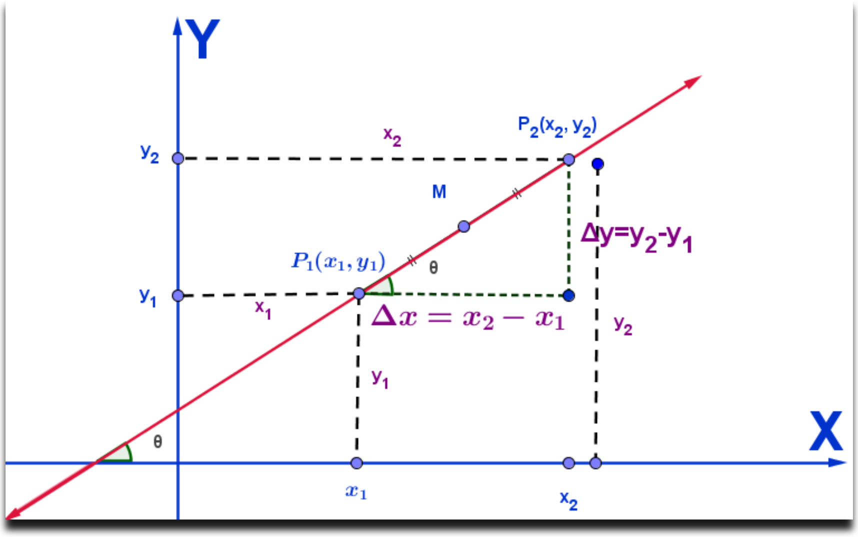
$D = [-5, \infty)$

$R = [0, \infty)$



2.10. LA LINEA RECTA. La recta es una sucesión infinita de puntos en el plano cartesiano. Se genera a partir de la gráfica de una función lineal, la cual relaciona a dos variables, una llamada independiente "x" y la otra llamada dependiente "y". Se llama dependiente a la variable "y", porque su existencia depende del valor que tome la variable "x".

TIPS PARA LA LINEA RECTA



- Para hallar la distancia entre dos puntos $P_1(X_1, Y_1)$ y $P_2(X_2, Y_2)$ conocidos:

$$\boxed{\overline{P1P2} = d = \sqrt{(X2 - X1)^2 + (Y2 - Y1)^2}}$$

- Coordenadas del punto medio entre dos puntos $P_1(X_1, Y_1)$ y $P_2(X_2, Y_2)$ conocidos:

$$\boxed{M\left(\frac{X2 + X1}{2}, \frac{Y2 + Y1}{2}\right)}$$

- Pendiente de un segmento entre $P_1(X_1, Y_1)$ y $P_2(X_2, Y_2)$, o de la recta que pasa por ese par de puntos:

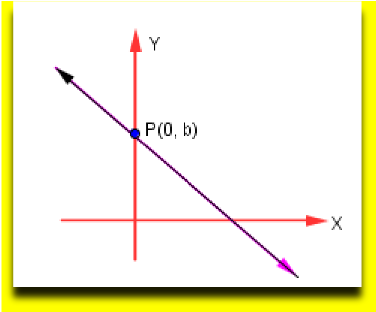
$$\boxed{m = \tan\theta = \frac{Y2 - Y1}{X2 - X1}}$$

- Para hallar la ecuación de la recta que pasa por $P_1(X_1, Y_1)$ y tiene pendiente "m":

$$\boxed{Y - Y1 = m(X - X1)}$$; a partir de ésta podemos llegar a la ecuación general de la línea recta: $\boxed{AX + BY + C = 0}$; o a una

ecuación de la forma Pendiente - intercepto:

$$\boxed{y = mx + b}$$

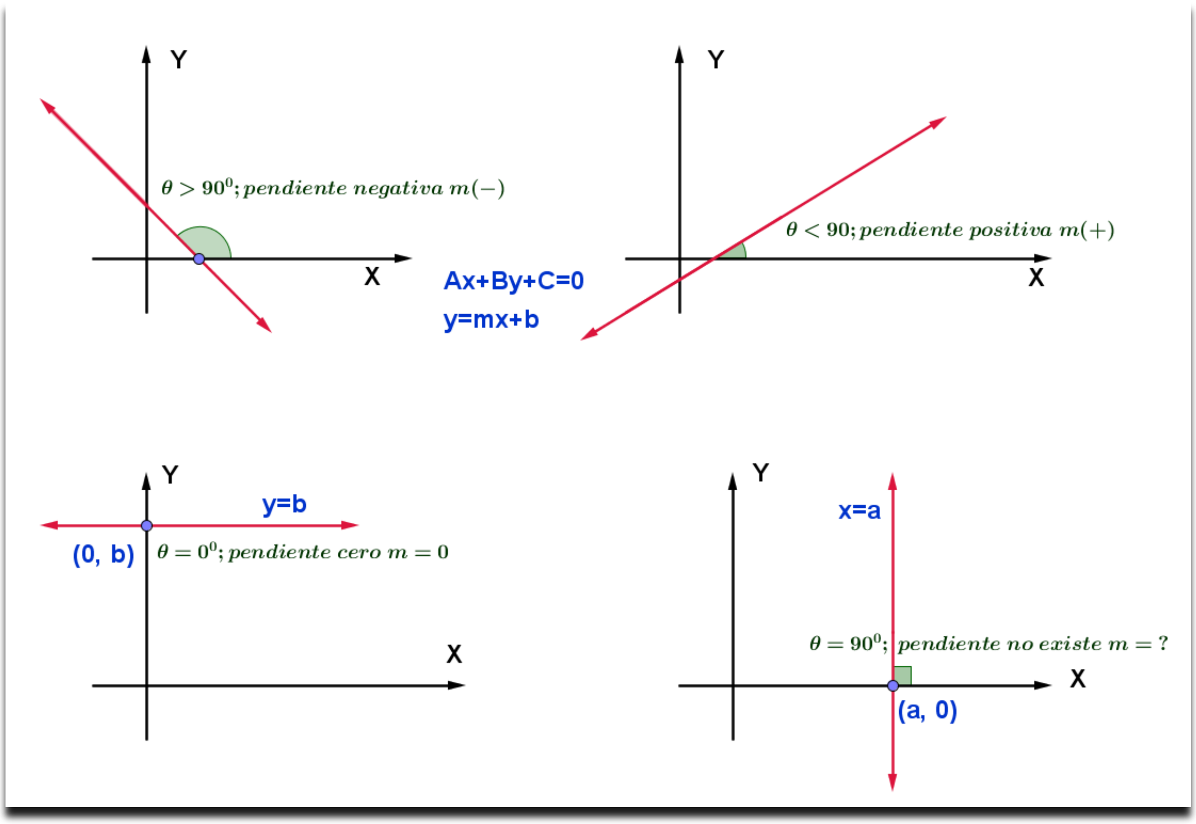


- Si dos rectas son paralelas, sus pendientes son iguales: $\boxed{Si\ \overleftrightarrow{l_1} // \overleftrightarrow{l_2} \rightarrow m_1 = m_2}$

- Si dos rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes es -1:

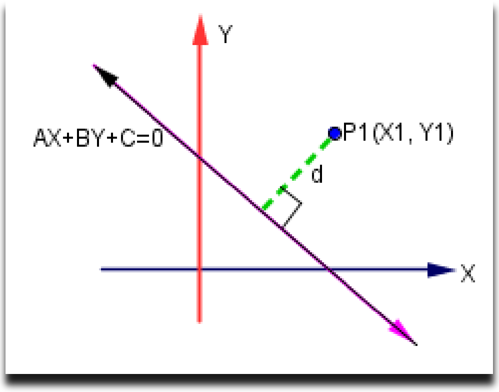
$$\boxed{Si\ \overleftrightarrow{l_1} \perp \overleftrightarrow{l_2} \rightarrow m_1 . m_2 = -1}$$

- Tipos de ecuaciones de la línea recta



- Distancia de un punto P1(X1, Y1) a la recta AX+BY+C=0

$$d = \left|\frac{A.X1 + B.Y1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$



Ejemplo 29. Grafiquemos la función $y = 3x - 2$

Solución: Debemos escoger algunos números que representan a la variable “x”, para obtener el valor de la variable y respectiva así:

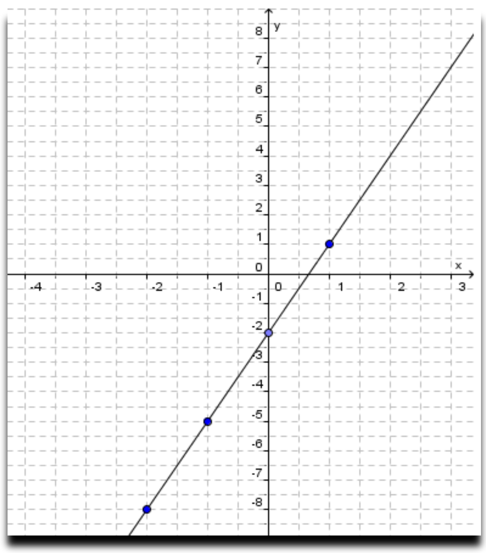
x	-2	-1	0	1
y	-8	-5	-2	1

El proceso:

Para x= -2: $y = 3(-2) - 2 = -6 - 2 = -8$
Para x =-1: $y = 3(-1) - 2 = -3 - 2 = -5$
Para x = 0: $y = 3(0) - 2 = 0 - 2 = -2$
Para x = 1: $y = 3(1) - 2 = 1$

Nos genera las siguientes coordenadas
$(-2.-8); (-1,-5); (0,-2); (1,1)$

Luego los ubicamos en el plano cartesiano.

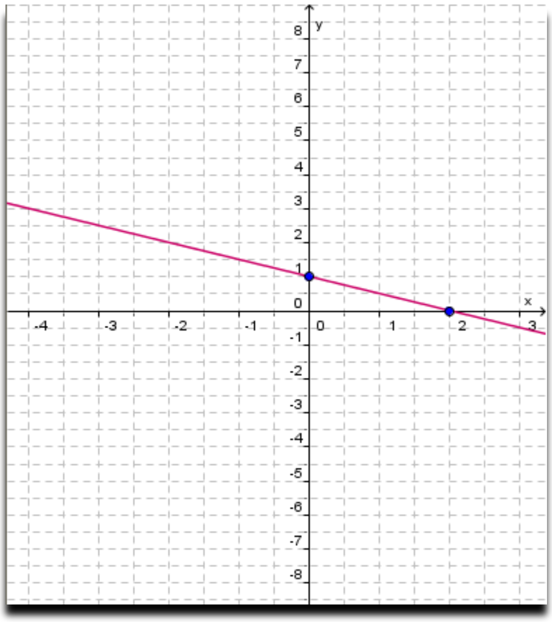


NOTA: Es importante que tengas en cuenta que para graficar una línea recta basta con obtener dos puntos de ella y luego con una regla prolongarlos hasta el infinito.

Ejemplo 30. Grafiquemos la función $Y = -\frac{1}{2}X + 1$

Solución: Debemos escoger dos números que representen a la variable “x”, para obtener dos valores de “y”, así:

x	0	2
y	1	0



El proceso:

Para x =0: $y = \frac{-1}{2}(0) + 1 = 0 + 1 = 1$

Para x =2: $y = \frac{-1}{2}(2) + 1 = -1 + 1 = 0$

Así obtenemos las coordenadas $(0{,}1)$; $(2{,}0)$

<u>Ejemplo 31.</u> Calcular la distancia entre $A = (2{,}3)\ y\ B = (-2, -3)$

Solución: Ubicamos los puntos en el plano cartesiano. Renombramos los puntos, es decir A= (x_1, y_1) y B= (x_2, y_2), entonces x_1= 2, y_1= 3; x_2= -2, y_2 =-3
Reemplazo en la fórmula de distancia entre dos puntos:

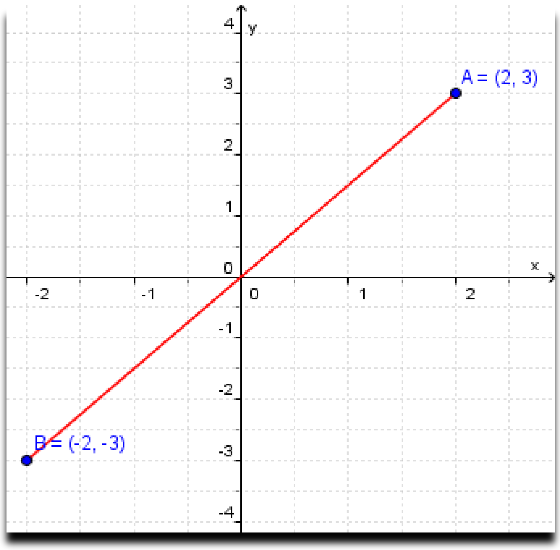
$$|\overline{AB}| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Nos queda

$|\overline{AB}| = \sqrt{(-3-3)^2 + (-2-2)^2}$

$|\overline{AB}| = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$

$|\overline{AB}|$ =7.2 distancia entre los dos puntos



<u>Ejemplo 32.</u> Hallemos las coordenadas del punto medio dado por $(-2{,}3)\ y\ (4, -2)$

Solución: Nombramos los puntos $A = (-2{,}3)\ y\ B = (4, -2)$ x_1=-2 y y_1= 3; x_2=4 y y_2=-2

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3-2}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Donde el punto del medio del segmento formado por $\overline{AB}$ es M= $\left(1, \frac{1}{2}\right)$; podemos comprobar que $\overline{AM} = \overline{MB}$, analicemos

$\overline{AM} = \sqrt{\left(3 - \frac{1}{2}\right)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{\left(\frac{6-1}{2}\right)^2 + (-3)^2}$

$\overline{AM} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 9} = \sqrt{\frac{25}{4} + 9} = \sqrt{\frac{25+36}{4}}$

$\overline{AM} = \sqrt{\frac{61}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{4}} = 3{,}9$

Ahora

$\overline{MB} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - (-2)\right)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + 2\right)^2 + (3)^2}$

$\overline{MB} = \sqrt{\left(\frac{1+4}{2}\right)^2 + 9} = \sqrt{\frac{25}{4} + 9} = \sqrt{\frac{25+36}{4}} = \sqrt{\frac{61}{4}}$

$\overline{MB} = \frac{\sqrt{61}}{2} = 3{,}9$

Analizamos que son iguales las distancias por lo tanto M si es el punto medio.

<u>Ejemplo 33.</u> Hallemos la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que une los puntos $A = (-5,3)\ yB = (2,-3)$.

Solución: Reemplacemos en la fórmula de la pendiente y tenemos que $A = (X_1, Y_1)$ y $B = (X_2, Y_2)$, por lo tanto m= $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-3-3}{2+5} = \frac{-6}{7}$= -0.85

Ahora para calcular el ángulo de dirección tenemos $\tan\theta = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$\tan\theta = \frac{-6}{7}$ Despejando θ= $\tan^{-1}\frac{-6}{7}$, entonces θ= -40.6

Este ángulo esta presentado en dirección negativa.

Este ángulo está presentado en forma negativa, su respectivo valor en forma positiva es $\theta = 180 - 40.6$; $\theta = 139.39$

<u>Ejemplo 34.</u> Hallemos la ecuación de la recta que pasa por $(-3\ ,4)$ y su pendiente es 2.

Solución: El punto conocido $(x_1, y_1) = (-3,4)$ y la pendiente m=2; sustituyendo en la ecuación tenemos: $Y - 4 = 2(x - (-3)) \rightarrow Y - 4 = 2x + 6$

$Y = 2x + 6 + 4 \rightarrow Y = 2x + 10$

<u>Ejemplo 35.</u> Hallemos la ecuación de la recta que pasa por $(-1{,}3)\ y\ (2{,}0)$.

Solución: Sea $A = (-1,3)\ y\ B = (2{,}0)$

Calculo la pendiente m=$\frac{0-3}{2-(-1)} = \frac{-3}{3}$ =-1

Luego escojo cualquier punto A.B, escojamos $A = (-1{,}3) = (x_1 y_1)$, luego reemplazando en la ecuación de la recta $(y - y_1) = m(x - x_1) \Rightarrow$

$(y - 3) = -1\ (x - (-1)) \rightarrow Y - 3 = -x - 1 \rightarrow Y = -x - 1 + 3 \rightarrow Y = -x + 2$

<u>Ejemplo 36.</u> Dada la ecuación $5x + 8y - 10 = 0$. Calculemos la pendiente y la ordenada del intercepto con el eje y.

Solución:

Ax+By+C=0 → y=mx+b

5x+8y-10=0 →y= $\frac{-5x+10}{8}$

y= $\frac{-5}{8}x + \frac{5}{4}$→ b= $\frac{5}{4}$ y m= $\frac{-5}{8}$

Ejemplo 37. Hallemos la ecuación de la recta que pasa por $(2,-3)$ y es paralela a la recta $y = -2x+1$

Solución: La recta dada es y= -2x+1, entonces la pendiente m= -2, por la teoría la pendiente de la recta a encontrar es también m=-2 ya que son paralelas.

Utilizamos el punto (2, -3) y lo sustituimos en la ecuación y-$y_1 = m(x-x_1)$

y-$(-3) = -2(x-2)$⇒ y+3 = -2x+4 ⇒ y= -2x+ 4-3 ⇒ y=-2x+1

Ejemplo 38. Hallemos la ecuación de la recta que pasa por $(2,-3)$ y es perpendicular a = $y = -2x+1$.

Solución: La recta dada es $y = -2x+1$, la pendiente es $m = -2$, entonces como se necesita encontrar la pendiente de la perpendicular, entonces

$m_p = \frac{1}{2}$→ Pendiente de la recta perpendicular.

Ahora tomamos el punto $(2,-3)$ tenemos

$(y-y_1) = m(x-x_1)$⇒ y-(-3)=$\frac{1}{2}(x-2)$⇒ y+3=$\frac{1}{2}x-1$⇒ y=$\frac{1}{2}x-4$

Ejemplo 38.1. Demuestre si las ecuaciones lineales 3x+y=2 y 6x+2y=15 son paralelas, perpendiculares, o ninguna de las anteriores.

Ejemplo 38.2. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por (0, -3) y es perpendicular a la gráfica de la ecuación 4x-3y6=0

Ejemplo 39. Grafique las siguientes rectas sin tabla de valores:

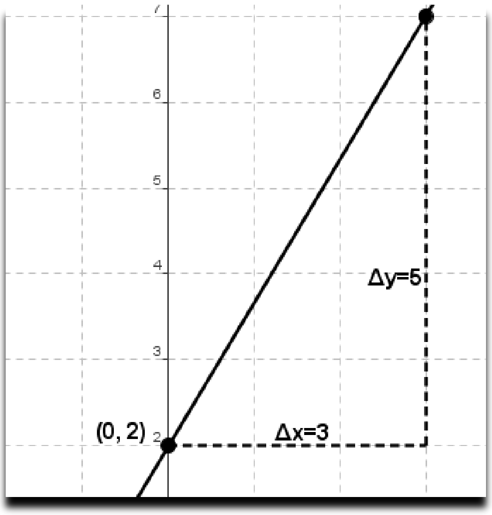
a. $y = \frac{5}{3}x + 2$ **b.** $y = -\frac{2}{3}x - 5$ **c.** $y = 3x + 2$

d. $2x - 3y + 1 = 0$ **e.** $2x = 3$ **f.** $4y - 5 = 0$

Solución:

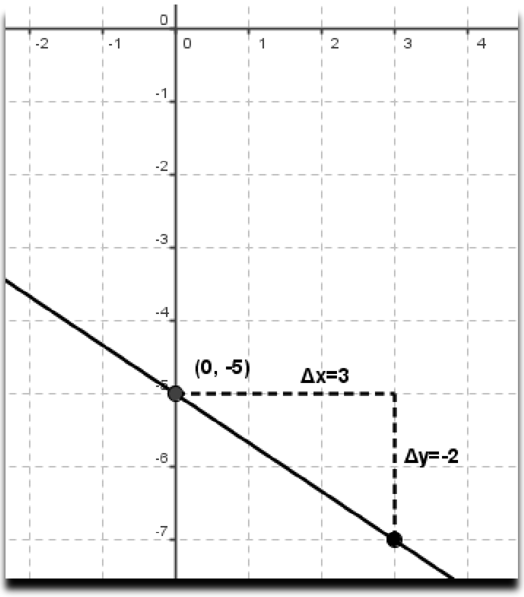
a. $y = \frac{5}{3}x + 2 \rightarrow b = 2$

$$m = \frac{5 \leftarrow \Delta y}{3 \leftarrow \Delta x}$$



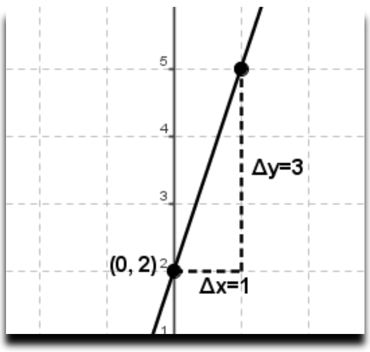
b. $y = -\frac{2}{3}x - 5 \rightarrow b = -5$

$$m = \frac{-2 \leftarrow \Delta y}{3 \leftarrow \Delta x}$$



c. $y = 3x + 2 \rightarrow b = 2$

$$m = \frac{3 \leftarrow \Delta y}{1 \leftarrow \Delta x}$$



d.

$$2x - 3y + 1 = 0$$

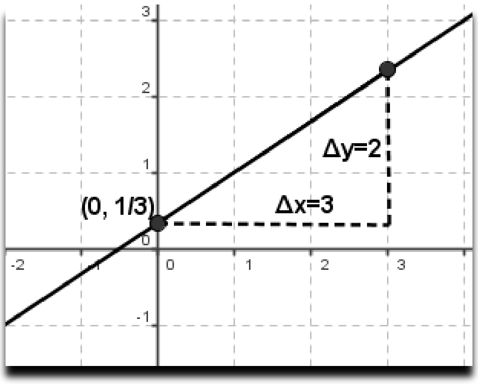
$$-3y = -2x - 1$$

$$y = \frac{-2x - 1}{-3}$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow b = 1/3$$

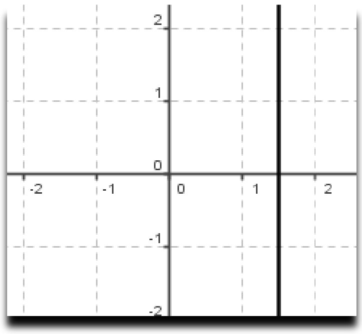
$$\downarrow$$

$$m = \frac{2 \leftarrow \Delta y}{3 \leftarrow \Delta x}$$



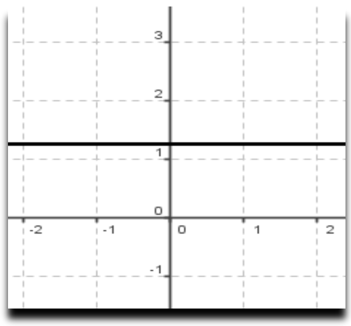
e. $2x = 3$

$$x = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

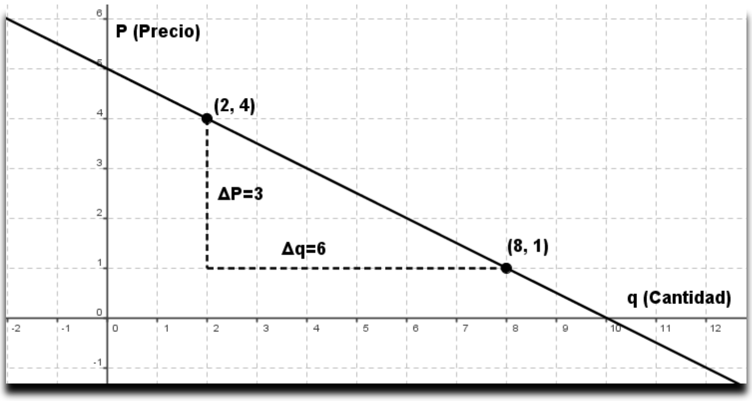


f. $4y - 5 = 0$

$$y = \frac{5}{4} \Rightarrow y = 1\frac{1}{4}$$

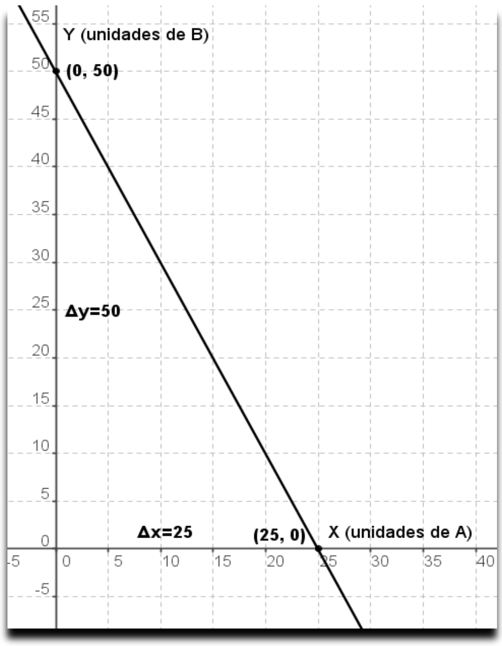


Ejemplo 40. En la figura se muestra la relación entre el precio "p" de un artículo (en dólares) y la cantidad "q" de artículos (en miles) que los consumidores comprarán a ese precio.



La pendiente es: $m = \frac{\Delta p}{\Delta q} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$, lo cual significa que por una disminución de $1 en cada artículo, los consumidores comprarán 2000 artículos más.

Ejemplo 41. Suponga que un fabricante utiliza 100 libras de material para hacer los productos A y B, que requieren de 4 y 2 libras de material por unidad, respectivamente. Si "x" y "y" denotan el número de unidades producidas de A y B, respectivamente; entonces, todos los niveles de producción están dados por las combinaciones de "x" y "y" que satisfacen la ecuación 4x + 2y = 100, donde x, y ≥ 0



$$\Rightarrow y = \frac{100-4x}{2} \Rightarrow y = 50 - 2x \Rightarrow m = \frac{-2}{1} = \frac{-2_{\times}25}{1_{\times}25} = \frac{-50}{25}\begin{matrix}\leftarrow \Delta y\\ \leftarrow \Delta x\end{matrix}$$

La pendiente: $m = \frac{-2}{1}$ refleja la tasa de cambio del nivel de producción B con respecto al de A. Si se produce una unidad adicional de A, se producirá 2 unidades menos de B.

Ejemplo 42. (Función costo de electricidad). La electricidad se cobra a los consumidores a una tarifa de 10 centavos por unidad para las primeras 50 unidades y a 3 centavos por unidad para cantidades que excedan las 50 unidades. Determine la función C(x) que da el costo de usar x unidades de electricidad. (Grafique)

Solución:

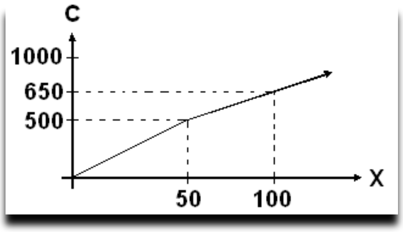
$$C(x) = \begin{cases} 10\,x, & si \quad x \leq 50 \\ 350 + 3\,x, & si \quad x > 50 \end{cases}$$

Porque para las primeras 50 unidades se cobra a 10 centavos por unidad $\Rightarrow$10x, si x ≤ 50 sería el primer tramo.

Para el segundo tramo: si x > 50 se cobra las primeras 50 unidades a 10 centavos, o sea 10 x 50=500 pero las unidades después de 50 se cobran a 3 centavos, o sea (x-50) x 3; entonces el costo en el segundo tramo seria: 500 + (x-50) x 3= 500 + 3x-150 = 350 + 3x, si x > 50

X	0	50	50	100
C	0	500	500	650

10x 350 + 3x



Ejemplo 43. En cierta ciudad la tarifa de taxis es $3000 de cobro inicial (banderazo). Se sabe que un usuario debe cancelar $ 5400 cuando ha recorrido 6 kilómetros.

Construir un modelo matemático lineal que describa tal situación y haga su gráfica.

¿Canto debe pagar un usuario que viaja de una población a otra y cuya distancia es de 15 kilómetros?

Solución:

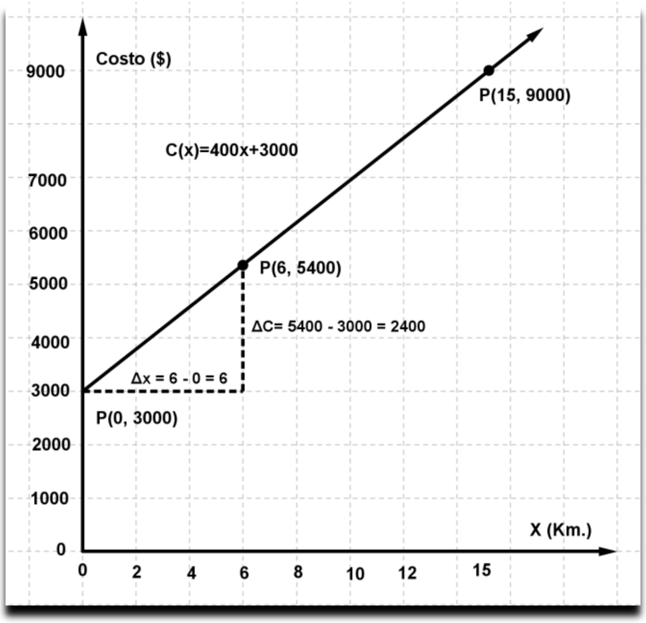
$$m = \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\$2400}{6\,Km} = \$400/Km$$

b=$3000

$$C(x) = mx + b$$

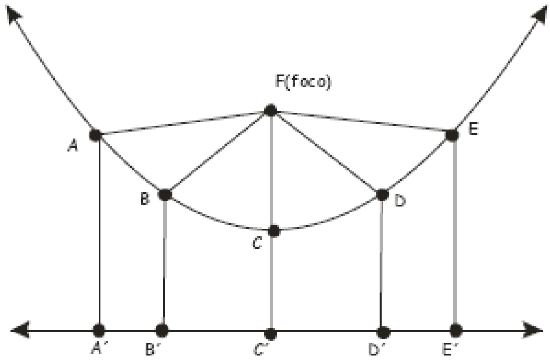
$$\Rightarrow C(x) = 400x + 3000$$

$$C(15) = 400 * 15 + 3000$$
$$= \$9000$$



2.11. LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una PARABOLA es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan (igual distancia) de un punto fijo llamado foco (F), y de una recta cualquiera llamada Directriz (D).



Los puntos A, B, C, D y E pertenecen a la parábola ya que:

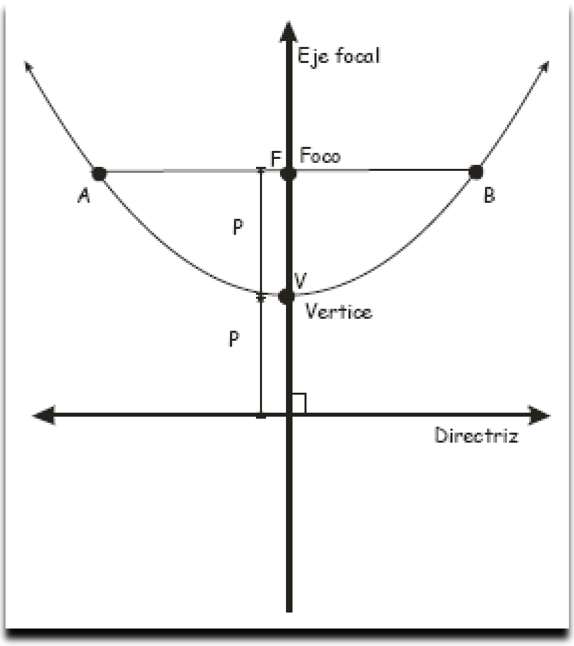
$|\overline{AF}| = |\overline{AA'}|$, $|\overline{BF}| = |\overline{BB'}|$, $|\overline{CF}| = |\overline{CC'}|$

$|\overline{DF}| = |\overline{DD'}|$ y $|\overline{EF}| = |\overline{EE'}|$

ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA

Los elementos básicos de una parábola son los siguientes:

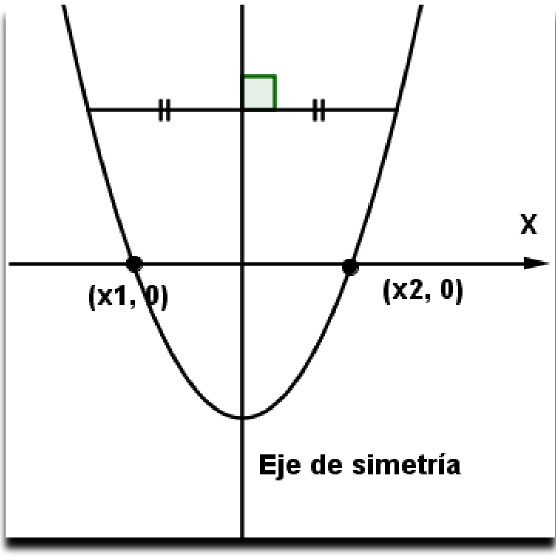
1) **Foco (F):** es el punto fijo mencionado en la definición.
2) **Directriz (D):** es la recta fija mencionada en la definición.
3) **Eje Focal:** es una recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz.
4) **Vértice:** Es el punto donde el eje focal corta la parábola.
5) **Distancia Focal:** es la distancia dirigida del vértice al foco y del vértice a la directriz, se denota por **p.**
6) **Lado recto:** es un segmento perpendicular al eje focal, que pasa por el foco (F**)**, cuyos extremos son dos puntos de la parábola.



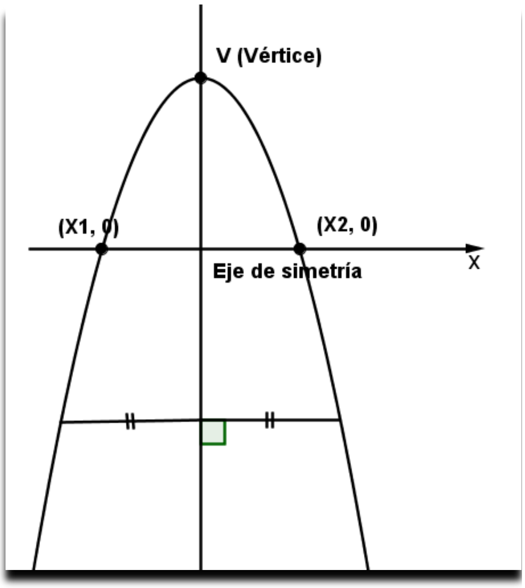
Una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ con a, b, c constantes se denomina función cuadrática.

La gráfica de una función cuadrática es una curva denominada parábola.

La función parábola es de dos formas:



Cóncava hacia arriba. a>0



Cóncava hacia abajo. a<0

Una función de la forma f(x) = ax^2 + bx + c (a ≠ 0) con a, b, c constantes se denomina función cuadrática.

Función cuadrática → y= ax^2 + bx + c

Ecuación cuadrática→ 0= ax^2 + bx + c → se puede resolver factorizando (si es factorizable), o por la formula general:

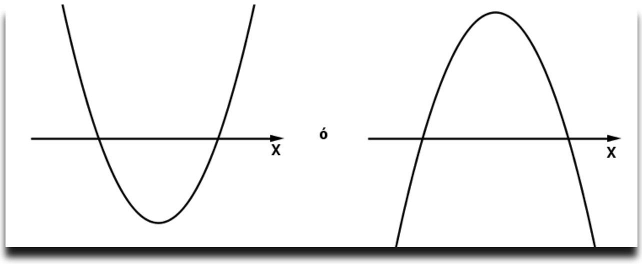
Resultan los interceptos $p_1(x_1,0) \wedge p_2(x_2,0) \Leftarrow$ $\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

Donde (b^2 - 4ac) es el discriminante

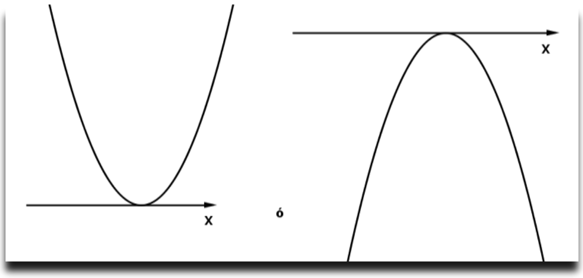
Vértice de la parábola: $\boxed{V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) \text{ o } V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)}$

El discriminante (b^2 - 4ac) puede ser:

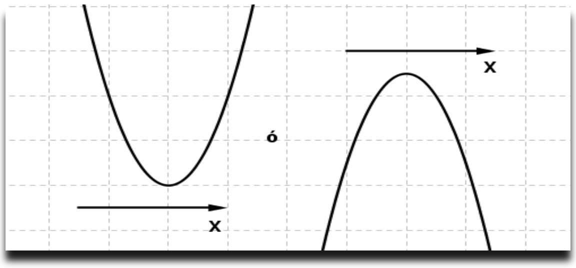
i) b^2 - 4ac > 0 ⇒



ii) $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$



iii) $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$



La coordenada del vértice V (h, k) de la función cuadrática también se puede hallar a partir de su expresión canónica: $\boxed{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$

Ejemplo 44. Grafique las siguientes parábolas hallando los vértices e interceptos.

(a) $y = x^2 - x - 6$

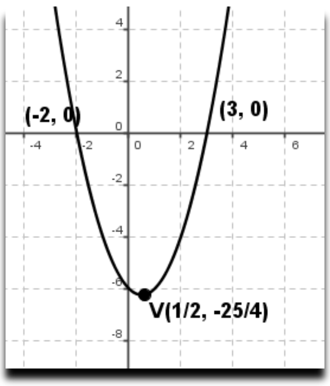
Solución:

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \\ c=-6 \end{array}\right\} \quad V = \left(\frac{-(-1)}{2(1)}, \frac{4(1)(-6)-(-1)^2}{4(1)}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-25}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, -6\frac{1}{4}\right)$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} =$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$y \quad x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$$

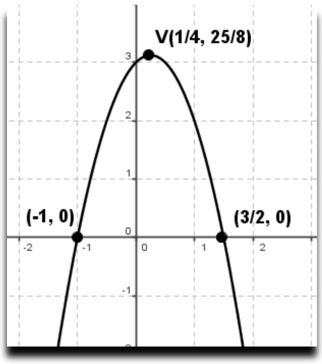


b) $y = -2x^2 + x + 3$

Solución:

a=-2 c= 3 b= 1 $\Rightarrow V=\left(-\frac{1}{2(-2)},\frac{4(-2)(3)-1^2}{4(-2)}\right)=\left(\frac{1}{4},\frac{-25}{-8}\right)=\left(\frac{1}{4},3\frac{1}{8}\right)$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)(3)}}{2(-2)}$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{-4}=\frac{-1\pm 5}{-4}\Rightarrow x_1=\frac{-1+5}{-4}=-1;$$
$$x_2=\frac{-1-5}{-4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$$



c) y= $3x^2$ - 4x + 8 (1)

Solución:

a=3

b= - 4

c= 8

$$V=\left(-\frac{-4}{2(3)},\frac{4(3)(8)-(-4)^2}{4(3)}\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{20}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},6\frac{2}{3}\right)$$

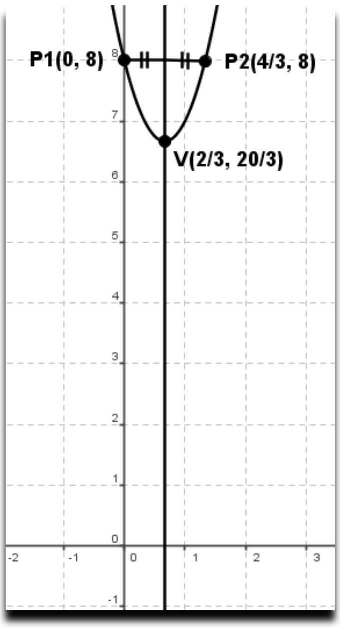
$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(3)(8)}}{2(3)}=$$
$$\frac{4\pm\sqrt{16-96}}{6}$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{-80}}{6}\ldots i$$

Raíces imaginarias,

no corta el eje “x” la parábola

$\Rightarrow$x= 0 en (1) $\rightarrow$y=8$\rightarrow p_1$(0,8)



d) $y = x^2 - 9$

Solución:
a=1, b=0, c=-9

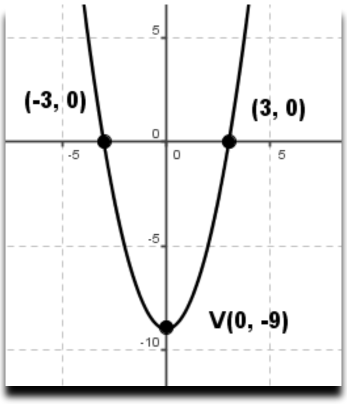
$$\Rightarrow V = \left(-\frac{0}{2(1)}, \frac{4(1)(-9) - 0^2}{4(1)}\right)$$

$\Rightarrow$v=(o,-9)

$0 = x^2 - 9 \rightarrow 0 = (x-3)\,(x+3)$

↓ ↓

x=3 x=-3



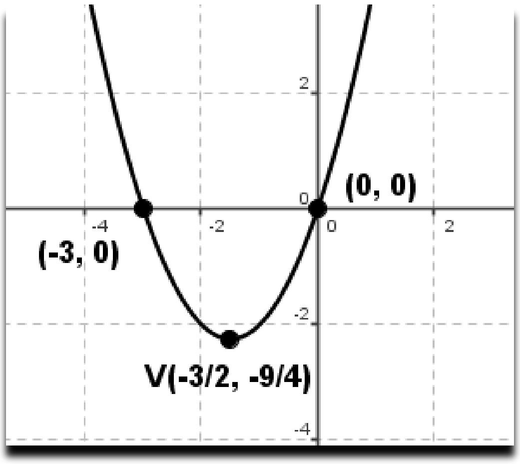
e) $y = x^2 + 3x$

Solución: a=1, b=3, c=0

$$\Rightarrow V = \left(-\frac{3}{2(1)}, \frac{4(1)(0) - 3^2}{4(1)}\right)$$

$$V = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right) = \left(1\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4}\right)$$

$0 = x^2 + 3x \Rightarrow 0 = x(x+3) \Rightarrow$ x=0, x=-3



f) $y = -x^2 + 4x - 4$ (1)

Solución: a=-1, b=4, c=-4

$$\Rightarrow V = \left(-\frac{4}{2(-1)}, \frac{4(-1)(-4) - 4^2}{4(-1)}\right)$$

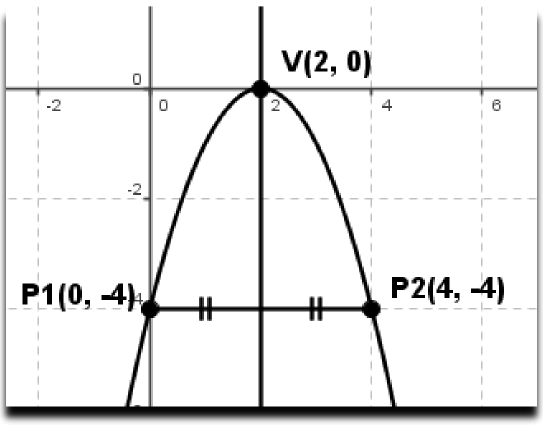
$\Rightarrow$v= (2,0)

$0 = -x^2 + 4x - 4 \Rightarrow 0 = x^2 - 4x + 4$

$0 = (x-2)^2$ x= 0 en (1) $\rightarrow$y= - 4

↓ $p_1(0,-4)$

x= 2



Ejemplo 44.1. Hallar las coordenadas del vértice de las siguientes parábolas a partir de su expresión canónica

$$a.\ y = 4x^2 \Rightarrow \frac{1}{4}y = x^2 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{4}\underbrace{(y-0)}_{k=0} = \underbrace{(x-0)^2}_{h=0}}_{V(0,0)}$$

$$\boxed{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$$

$$b.\ y = -5x^2 \Rightarrow -\frac{1}{5}y = x^2 \Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{5}\underbrace{(y-0)}_{k=0} = \underbrace{(x-0)^2}_{h=0}}_{V(0,0)}$$

$$c.\ y = x^2 - 2 \Rightarrow y + 2 = x^2 \Rightarrow \underbrace{\underbrace{(y+2)}_{k=-2} = \underbrace{(x-0)^2}_{h=0}}_{V(0,-2)}$$

$$d.\ y = (x-1)^2 \Rightarrow \underbrace{\underbrace{(y-0)}_{k=0} = \underbrace{(x-1)^2}_{h=1}}_{V(1,0)}$$

$$e.\ y = (x+2)^2 - 4 \Rightarrow \underbrace{\underbrace{(y+4)}_{k=-4} = \underbrace{(x+2)^2}_{h=-2}}_{V(-2,-4)}$$

Ejemplo 44.2. Encontrar la función cuya gráfica es una parábola con vértice V (1,−2) y que pasa por el punto (4,16).

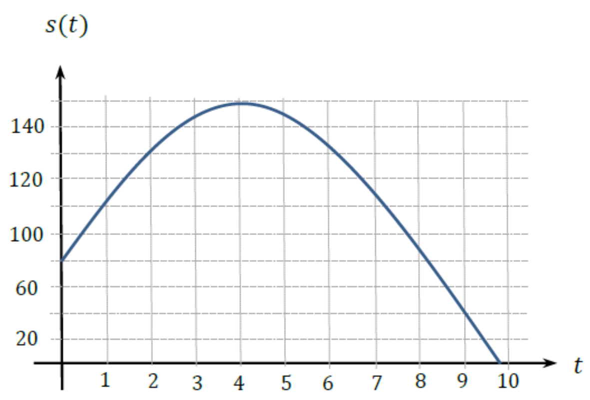
Solución:

$$\left.\begin{matrix} V(1,-2) \\ P(4,16) \end{matrix}\right\} \textit{Reemplazamos en } (x-h)^2 = 4p(y-k) \quad (1) \Rightarrow \underbrace{(4-1)^2 = 4p\big(16-(-2)\big)}_{9=4p(18)\Rightarrow\frac{9}{72}=p=\frac{1}{8}}$$

$$\left.\begin{matrix} V(1,-2) \\ p = \frac{1}{8} \end{matrix}\right\} en\ (\mathbf{1}):\ (x-1)^2 = 4\times\frac{1}{8}(y+2) \Rightarrow \underbrace{x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2}(y+2)}_{2x^2-4x+2=y+2\Rightarrow 2x^2-4x=y=f(x)}$$

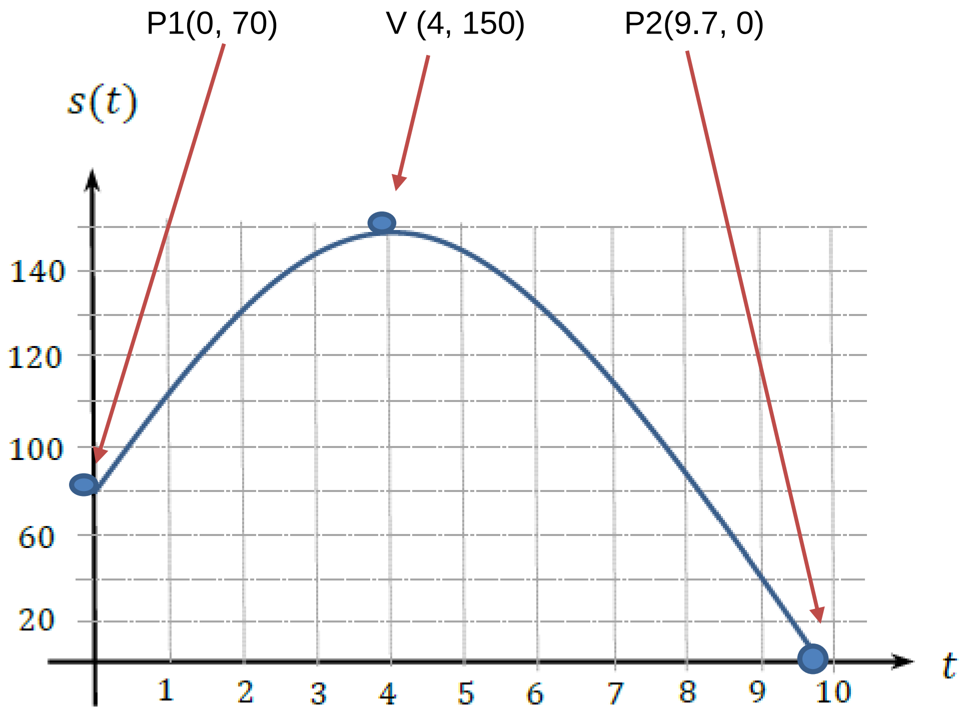
Ejemplo 44.3.

El gráfico que se presenta a continuación representa el desplazamiento de un objeto en caída libre. De acuerdo con la información suministrada en el gráfico encontrar lo que se pide a continuación:



a. La altura máxima alcanzada por el objeto, y el tiempo que tarda en alcanzarla.
b. La altura desde donde fue lanzado el objeto.
c. El tiempo que demora el objeto en caer al piso
d. Un modelo matemático que represente la altura $s(t)$ con respecto al piso, en metros, alcanzada por el objeto en un tiempo t, en segundos.
e. A partir del modelo matemático encontrar la altura alcanzada por el objeto 8 segundos después de haber sido lanzado.
f. A partir del modelo matemático indicar cuando el objeto alcanza una altura de 100 metros.

Solución:



a. V (4, 150); por lo tanto: Hmáx. Son 150 m. y la alcanza en 4 seg.
b. P1(0, 70); por lo tanto, fue lanzado desde los 70 m.
c. P2(9.7, 0) por lo tanto 9.7 seg. En caer al suelo
d. Teniendo V(4, 150) y P1(0, 70); reemplazamos en $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ su expresión

canónica: $(0-4)^2 = 4p(70-150) \Rightarrow 16 = 4p(-80) \Rightarrow \frac{16}{4(-80)} = p = -\frac{1}{20}$

Teniendo V(4, 150) y $p = -\frac{1}{20}$ reemplazamos en $(x-h)^2 = 4p(y-k) \Rightarrow$

$(x-4)^2 = 4\left(-\frac{1}{20}\right)(y-150) \Rightarrow$ $(x-4)^2 = -\frac{1}{5}(y-150)$ podría ser

la solución; o; $x^2 - 8x + 16 = -\frac{1}{5}(y-150) \Rightarrow 5x^2 - 40x + 80 = -y + 150 \Rightarrow$

$y = -5x^2 + 40x + 70$ o sea $s(t) = -5t^2 + 40t + 70$

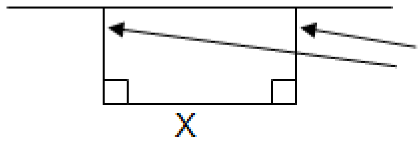
e. $s(8) = -5 * 8^2 + 40 * 8 + 70 \Rightarrow$. $s(8) = 70\ m$

f. $s(t) = -5t^2 + 40t + 70 \Rightarrow 100 = -5t^2 + 40t + 70 \Rightarrow 5t^2 - 40t + 30 = 0$

Divido en 5: $t^2 - 8t + 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4*1*6}}{2*1} = \frac{8 \pm 6.32}{2} \begin{cases} t_1 = 7.2\ seg. \\ t_2 = 0.8\ seg. \end{cases}$

45. (Cercas) un granjero tiene 200m de cerca con la cual puede delimitar un terreno rectangular. Un lado de terreno puede aprovechar una cerca que ya existe. ¿Cuál es el área máxima que puede cercarse? Halle las medidas del terreno

Solución:

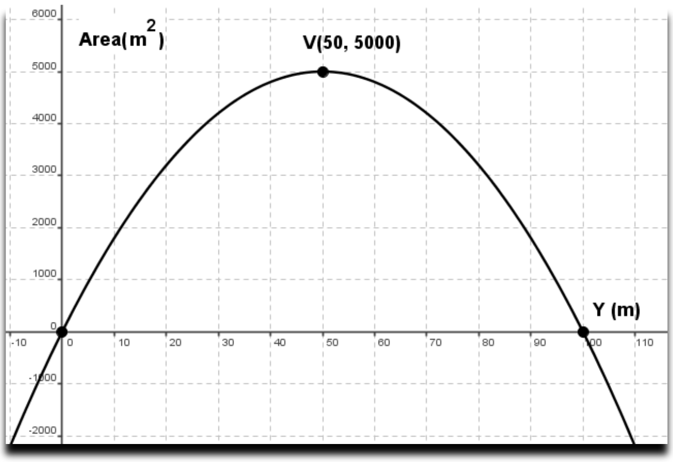


←cerca existente
Y   Área→x.y (1)
Perímetro→ p=200=x +2y
200 - 2y= x (2)

(2) en (1): A = (200 - 2y) y

→A = 200y -2y^2 (ecuación de una parábola).

Si hallamos el vértice de dicha parábola V (y, $A_{max.}$), su ordenada será el área máxima;



$\Rightarrow A = -2y^2 + 200y;$ a= -2, b= 200, c= 0

$$\Rightarrow V = \left(-\frac{200}{2(-2)}, \frac{4(-2)(0) - 200^2}{4(-2)}\right) = (50, 5000)$$

Y= 50 en (2) →
x= 200-2×50=100m
⇒Dimensiones: 100m×50m.

Área máxima 5000m^2

Ejemplo 46. (Decisiones sobre fijación de precios). La demanda mensual, x, de cierto artículo al precio de P dólares por unidad está dada por la relación
x = 1350 - 45 P. El costo de la mano de obra y del material con que se fabrica este producto es de $5 por unidad y los costos fijos son de $2000 al mes. a) ¿Qué precio por unidad P deberá fijarse al consumidor con objeto de obtener una utilidad máxima mensual? b) ¿Cuál es esa utilidad máxima? c) ¿Cuál sería la demanda para tener una utilidad máxima? d) ¿Cuál debe ser el precio/unidad para no tener pérdidas?

Solución: Demanda mensual → x=1350 – 45P (1)

P → \$U.S./unidad

Costo de mano de obra y material → \$U.S. 5/unidad

Costos fijos → \$U.S.200/mes

$$\begin{cases} P = ? \\ U \; máxima \end{cases}$$

$$\underbrace{U = I - C}$$

$$Utilidad = Ingresos - Costos \; (\underbrace{C_f}_{2000} \; , \; \underbrace{C_v}_{5x})$$

$$U = I - C = \underbrace{xP}_{\textbf{I}} - \underbrace{(5x + 2000)}_{\textbf{C}}$$

U = (1350 - 45P) P - (5x+2000)

U = (1350 - 45P) P - 5(1350 - 45P) - 2000 = 1350P - 45P^2 - 6750 + 225P – 2000; ⇒U = - 45P^2 + 1575P - 8750 (modelo matemático) (ecuación de una parábola cóncava hacia abajo, donde el vértice es el punto de máxima; donde obtendré el precio para una utilidad máxima).

a = - 45, b = 1575, c = -8750 $\Rightarrow V = \left(-\frac{1575}{2(-45)}, \frac{4(-45)(-8750) - 1575^2}{4(-45)} \right)$

⇒ V = (17.5, 5031.25)

P = \$17.5 para → $U_{máx}$ = \$5031.25

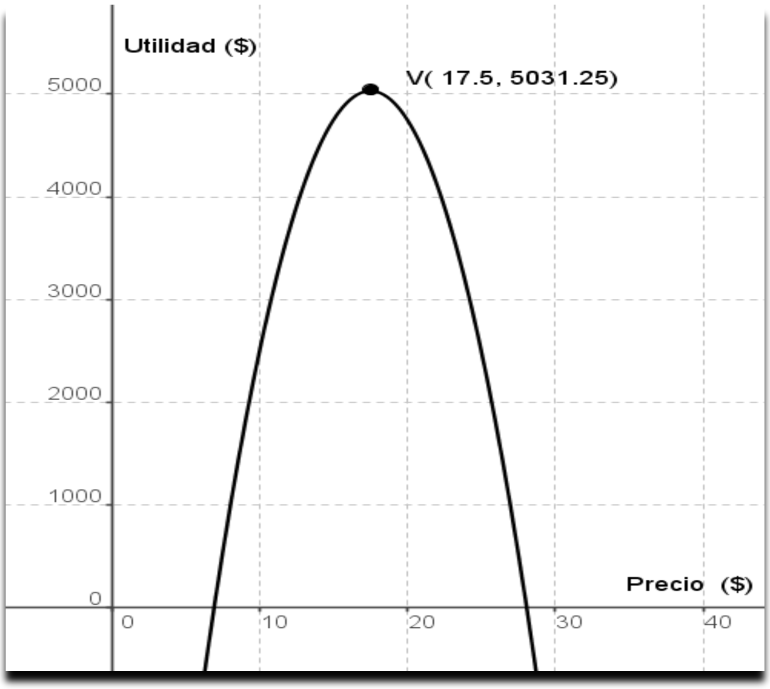
a) \$U.S. 17.5 b) Umáx. =\$U.S. 5031.25

c) P=17.5 en (1) → x = 1350 - 45*17.5 = 562.5 ⇒ x = 563 artículos

d) → 0 = - 45P^2+1575P – 8750 → ÷ (-45) → 0 = P^2 - 35P + 194.4

$$P = \frac{35 \pm \sqrt{35^2 - 4(1)(194.4)}}{2(1)} = \begin{cases} P_1 = \$U.S. 28.07 \\ P_2 = \$U.S. 6.93 \end{cases}$$

$$El \; precio \; está \; entre \; \$U.S. 28.07 \; y \; \$U.S. 6.93$$



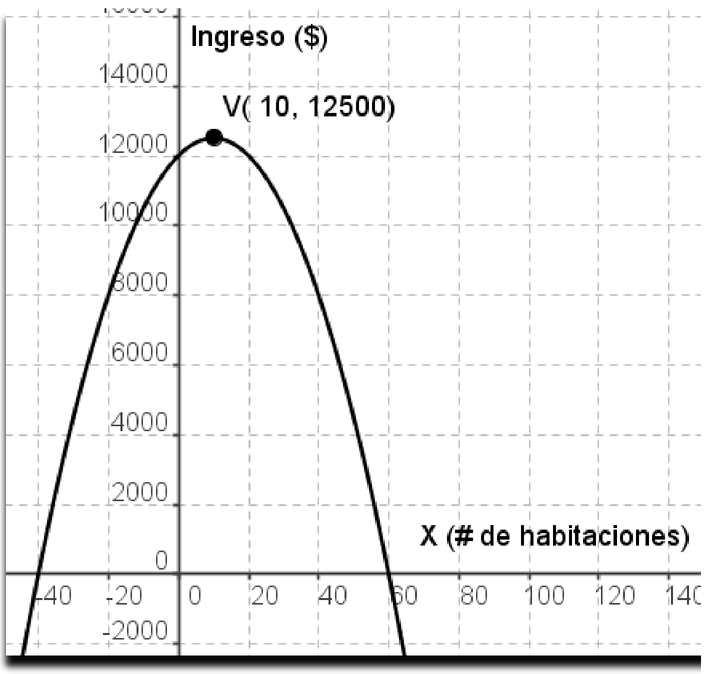
Ejemplo 47. (Decisiones sobre fijación de rentas). El señor Alonso es propietario de un edificio de departamentos con 60 habitaciones. Él puede rentarlas todas si fija una renta mensual de $200 por habitación. A una renta más alta, algunas habitaciones quedarán vacías. En promedio, por cada incremento de la renta de $5, una habitación quedará vacía sin posibilidad alguna de rentarla. Determine la relación función entre el ingreso mensual total y el número de habitaciones vacías. ¿Qué renta mensual maximizaría el ingreso total? ¿Cuál es el ingreso máximo?

Solución: x → # de habitaciones vacías

$$\text{Ingreso} \rightarrow I = \underbrace{(60 - x)}_{\substack{\#\text{ de habitaciones}\\ \text{que renta}}} . \underbrace{(200 + 5x)}_{\substack{\text{valor en que}\\ \text{renta cada habitación}}}$$

$\Rightarrow$ I = 12000 + 300x - 200x - 5x^2

$\Rightarrow$I = - 5x^2 + 100x + 12000



a = -5, b = 100, c = 12000

$$\Rightarrow V = \left(-\frac{100}{2(-5)}, \frac{4(-5)(12000) - 100^2}{4(-5)} \right)$$

$\Rightarrow$V = (10,12500)

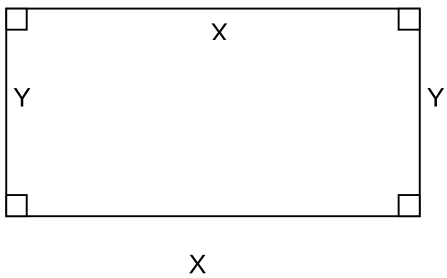
X = 10 para $\rightarrow$ $I_{máx}$ = $12500

Renta mensual máxima: 200 + 5x

= 200 + 5 x 10 = $250

Ejemplo 48. (Agricultura). Un granjero tiene 200 yardas de cerca para delimitar un terreno rectangular. Exprese el área A del terreno como una función de la longitud de uno de sus lados.

Solución:



Perímetro: P=200=2X+2Y

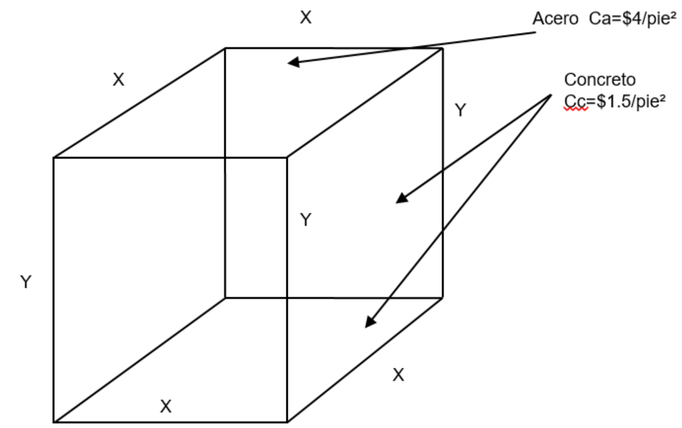
÷2 $\longrightarrow$ 100=X+Y

$\Rightarrow$ 100-Y = X (1)

Área $\rightarrow A = X_x Y$ (2) $\Rightarrow$ (1) en (2) $\rightarrow A = X(100-X)$ $A = 100X - X^2$

Ejemplo 49. (Función de costo). Se construye una cisterna de modo que su capacidad sea de 300 pies cúbicos de agua. La cisterna tiene como base un cuadrado y cuatro caras verticales, todas hechas de concreto y una tapa cuadrada de acero. Si el concreto tiene un costo de \$1.50 por pie cuadrado y el acero cuesta \$4 por pie cuadrado, determine el costo total C como una función de longitud del lado de la base.

Solución:



$C_T = f(x) = ?$ $V = 300$ pies³

$$C_T = C_a B + C_c B + C_c A_l$$

Bases Area lateral

$$C_T = \frac{\$4}{pie^2} \times X^2 + \frac{\$1.5}{pie^2} \times X^2 + \frac{\$1.5}{pie^2} \times 4X.Y \Rightarrow C_T = 4X^2 + 1.5X^2 + 6XY$$

$$C_T = 5.5X^2 + 6XY \quad (1)$$

Volumen $\rightarrow V = 300 = X^2{}_x Y \Rightarrow 300 / X^2 = Y$ (2)

(2) en (1) $\rightarrow C_T = 5.5X^2 + 6X(300/X^2) \Rightarrow$ $Ct = 5.5X^2 + 1800/X$

Ejemplo 50. (Funciones de ingresos). Un hotel tiene 70 habitaciones que puede rentar en su totalidad si la renta se fija en \$200 al mes por habitación. Por cada incremento de \$5 en la renta de cada habitación, una habitación quedará vacía sin posibilidad alguna de rentarla. Exprese el ingreso mensual total I como una función de: (a) x, si x es el número de incrementos de \$5 en la renta de cada habitación.(b) La renta mensual P de cada habitación.

Solución: X→ # de incrementos de \$5

I = (200 + 5X)(70 – X) (1) ⇒ I = 14000 – 200X + 350X – 5X²

I = -5X² + 150X + 14000

↓

P = 200 + 5X ⇒ X=(P-200) / 5

↓

En (1) → $I = P\left(70 - \frac{P-200}{5}\right)$

$I = P\,\frac{(350 - P + 200)}{5} \Rightarrow I = \frac{P}{5}(550 - P)$

2.12. LA FUNCIÓN INVERSA

Ejemplo 51.1.: La función $f(x)=x^3-1$ ¿tendrá inversa?¿Cuál será? Grafique ambas funciones

Solución: Grafiquemos $f(x)=x^3-1$; D={xЄR};

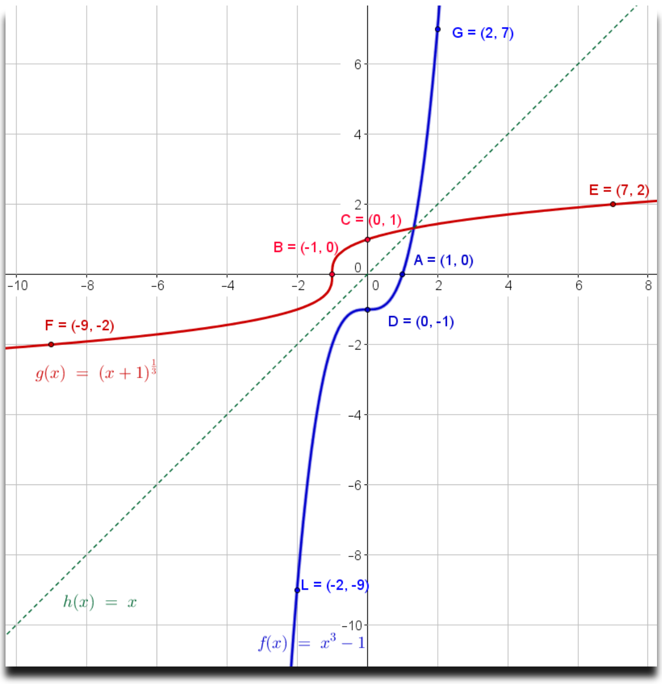
x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	-1	0	7	26	-2	-9	-28

Al graficar ésta función se observa que R={yЄR} y es inyectiva; por lo tanto $y=x^3-1$ tiene inversa; entonces hallemos su inversa: $y=x^3-1 \longleftarrow f(x)$

$x=y^3-1 \longleftarrow f^{-1}(x) \Rightarrow x+1=y^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{y^3} \Longrightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

donde D={xЄR};

x	0	7	26	-1	-2	-9
y	1	2	3	0	-1	-2



Obsérvese que la recta y=x es el eje de simetrías de ambas funciones

También podemos demostrar que una función es inyectiva (para que tenga inversa), demostrando que $Si\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ sin necesidad de hacer la gráfica.

Veamos en éste ejemplo: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow {x_1}^3 - 1 = {x_2}^3 - 1 \Rightarrow {x_1}^3 - 1 + 1 = {x_2}^3 \Rightarrow {x_1}^3 = {x_2}^3$

$\Rightarrow \sqrt[3]{{x_1}^3} = \sqrt[3]{{x_2}^3} \Rightarrow x_1 = x_2$; por lo tanto, f(x)=$x^3$-1 es inyectiva

https://www.youtube.com/watch?v=TxRpKrQJsdw

Ejemplo 51.2.: La función f(x)=2x+3 ¿tendrá inversa?¿Cuál será? Grafique ambas funciones

Solución: Grafiquemos f(x)=2x+3; D={xЄR};

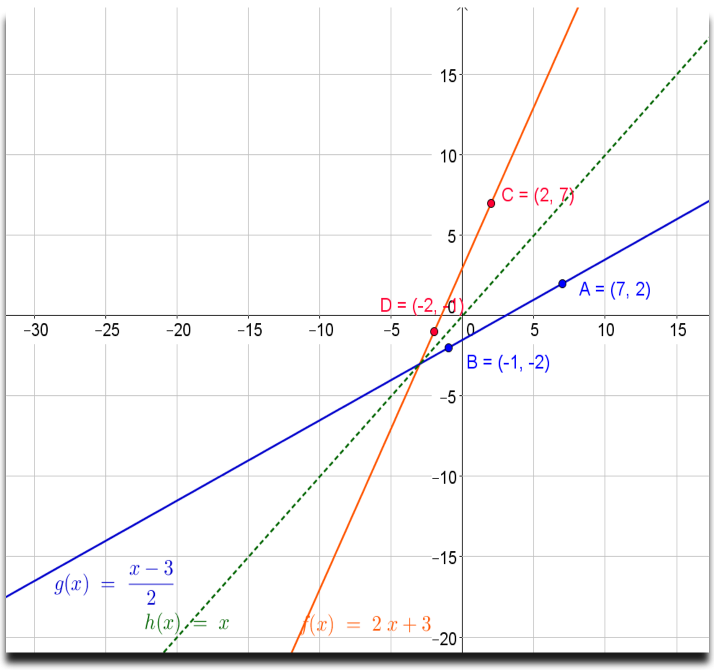
x	-2	2
y	-1	7

Al graficar ésta función se observa que R={yЄR} y es inyectiva; por lo tanto y=2x+3 tiene inversa; entonces hallemos su inversa: y=2x+3 ⟵ f(x)

x = 2y+3⟵ $f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{x-3}{2} = y \implies f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

donde D={xЄR};

x	-1	7
y	-2	2



Obsérvese que la recta y=x es el eje de simetrías de ambas funciones

Ejemplo 51.3.: La función $f(x)=\frac{1}{2}x^5-3$ ¿tendrá inversa?¿Cuál será? Grafique ambas funciones

Solución: Grafiquemos $f(x)=\frac{1}{2}x^5-3$; D={xЄR};

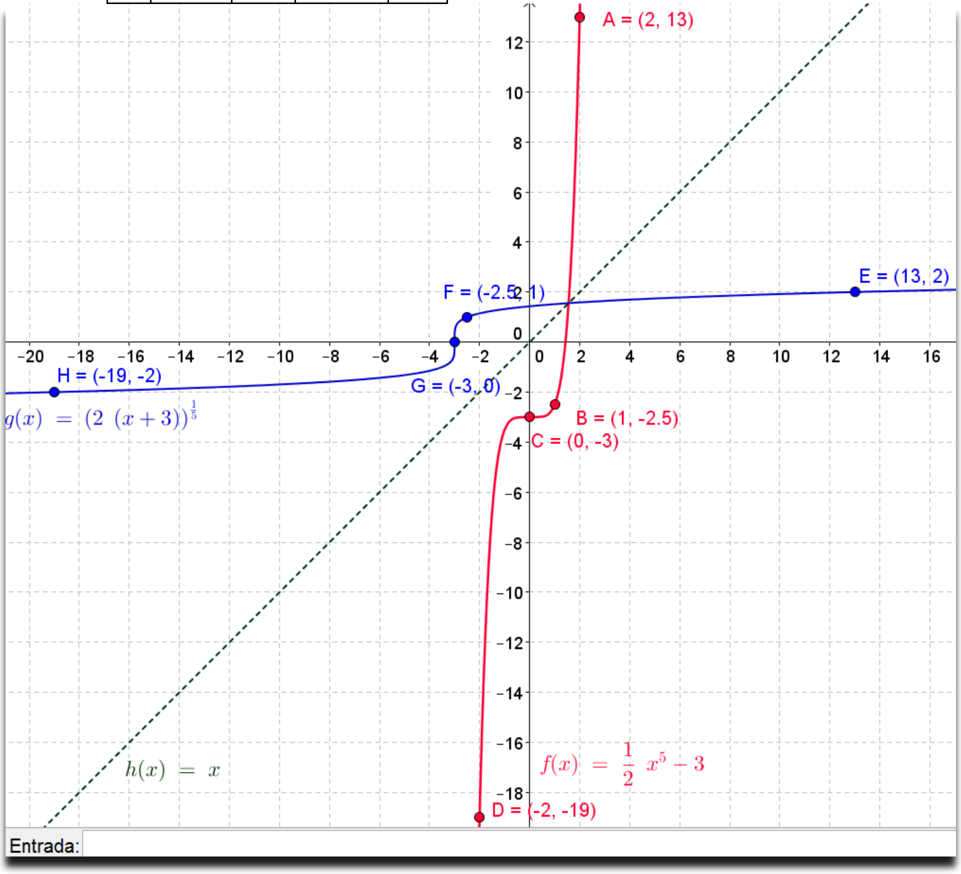
x	0	1	2	-1	-2
y	-3	-2.5	13	-3.5	-19

Al graficar ésta función se observa que R={yЄR} y es inyectiva; por lo tanto $y=\frac{1}{2}x^5-3$ tiene inversa; entonces hallemos su inversa: $y=\frac{1}{2}x^5-3 \longleftarrow f(x)$

$x=\frac{1}{2}y^5-3 \longleftarrow f^{-1}(x) \Rightarrow 2(x+3)=y^5 \;\Longrightarrow \sqrt[5]{2(x+3)}=\sqrt[5]{y^5} \Longrightarrow$

$y=f^{-1}(x)=\sqrt[5]{2(x+3)}$ donde D={xЄR};

x	-2.5	-3	-19	-3
y	1	2	3	0



Obsérvese que la recta y=x es el eje de simetrías de ambas funciones

Ejemplo 51.4.: La función $f(x)=\sqrt{-1-x}$ ¿tendrá inversa?¿Cuál será? Grafique ambas funciones

Solución: Grafiquemos $f(x)=\sqrt{-1-x}$;

$-1-x\geq 0 \;\Longrightarrow -1\geq x \Longrightarrow x\leq -1 \Longrightarrow \mathrm{D}=\{x\text{ЄR}/x\leq -1\}$

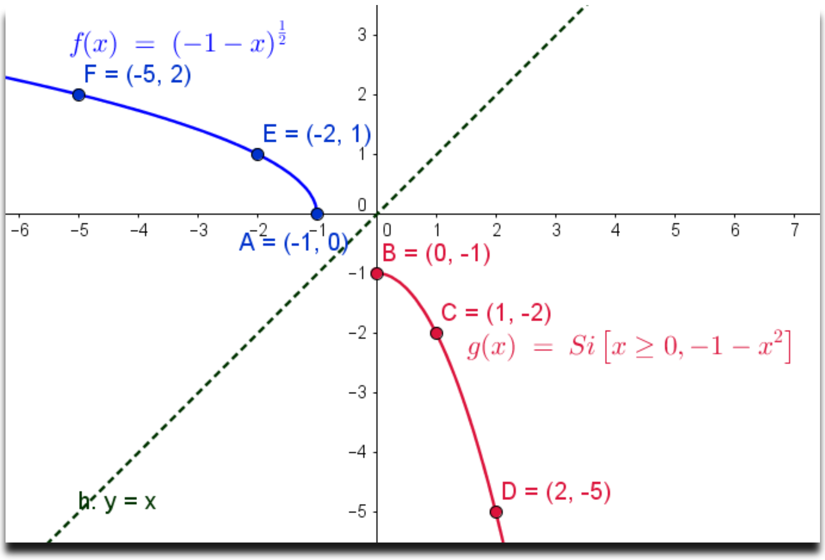
x	-1	-2	-5
y	0	1	2

Al graficar ésta función se observa que R={yЄR/y≥ 0} y es inyectiva; por lo tanto $f(x)=\sqrt{-1-x}$ tiene inversa: $y=\sqrt{-1-x} \longleftarrow$ f(x)

$x=\sqrt{-1-y}$ $\longleftarrow$ $f^{-1}(x)$ $\Rightarrow x^2=-1-y \Rightarrow y=-1-x^2 \Rightarrow y=f^{-1}(x)=-1-x^2$

donde D={xЄR/x≥ 0};

x	0	1	2
y	-1	-2	-5



Obsérvese que la recta y=x es el eje de simetrías de ambas funciones
https://www.youtube.com/watch?v=TxRpKrQJsdw&vl=es-419

Ejemplo 51.5.: Encontrar la inversa de cada una de las funciones que se dan a continuación, e indicar si dicha inversa es o no es función:

Recuerda que también podemos demostrar que una función es inyectiva (para que tenga inversa), demostrando que $Si\ f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ sin necesidad de hacer la gráfica.

$$a.\ \ \boldsymbol{y=f(x)=2x-8} \rightarrow Si \quad \underbrace{\underbrace{f(x_1)=f(x_2)}_{2x_1-8=2x_2-8}}_{2x_1=2x_2 \Rightarrow x_1=x_2 \quad Tiene\ inversa} \quad \Longrightarrow x_1=x_2$$

$$\Longrightarrow\ x=2y-8 \Longrightarrow \frac{x+8}{2}=y=f^{-1}(x)$$

$$b.\quad \boldsymbol{y = f(x) = \sqrt{x^2 - 4}} \rightarrow Si \quad \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{f(x_1) = f(x_2)}_{\sqrt{x_1^2-4}=\sqrt{x_2^2-4}}}_{\left(\sqrt{x_1^2-4}\right)^2=\left(\sqrt{x_2^2-4}\right)^2}}_{x_1^2-4=x_2^2-4\Rightarrow x_1^2=x_2^2}}_{\Rightarrow\sqrt{x_1^2}=\pm\sqrt{x_2^2}} \Longrightarrow x_1 = x_2$$

$\Rightarrow x_1 \neq \pm x_2$ *No es inyectiva*
(no tiene inversa)

$$c.\quad \boldsymbol{y = g(x) = x^3 + 6} \rightarrow Si \quad \underbrace{\underbrace{\underbrace{f(x_1) = f(x_2)}_{x_1^3+6=x_2^3+6}}_{x_1^3=x_2^3}}_{\sqrt[3]{x_1^3}=\sqrt[3]{x_2^3}\Rightarrow x_1=x_2} \Longrightarrow x_1 = x_2$$

$$\Longrightarrow x = y^3 + 6 \Longrightarrow x - 6 = y^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{x-6} = \sqrt[3]{y^3} \Longrightarrow \sqrt[3]{x-6} = y = g^{-1}(x)$$

$$d.\quad \boldsymbol{y = h(x) = log(x - 5)} \rightarrow Si \quad \underbrace{\underbrace{h(x_1) = h(x_2)}_{\log(x_1-5)=\log(x_2-5)}}_{x_1-5=x_2-5} \Longrightarrow x_1 = x_2$$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ *Tiene inversa*

$$\Longrightarrow x = \log(y-5) \Leftrightarrow 10^x = y - 5 \Longrightarrow 10^x + 5 = y = h^{-1}(x)$$

$$e.\quad \boldsymbol{y = f(t) = e^{(t-2)}} \rightarrow Si \quad \underbrace{\underbrace{f(t_1) = f(t_2)}_{e^{(t_1-2)}=e^{(t_2-2)}}}_{\ln e^{(t_1-2)}=\ln e^{(t_2-2)}\Rightarrow t_1-2=t_2-2} \Longrightarrow t_1 = t_2$$

$\Rightarrow t_1 = t_2$ *Tiene inversa*

$$\Longrightarrow t = e^{(y-2)} \Longrightarrow \ln t = \ln e^{(y-2)} \Longrightarrow \ln t = (y-2)\ln e \Longrightarrow \ln t = (y-2) \Longrightarrow \ln t + 2 = y = f^{-1}(t)$$

$$f.\quad \boldsymbol{y = g(t) = \frac{3t - 4}{t - 5}} \rightarrow Si \quad \underbrace{\underbrace{g(t_1) = g(t_2)}_{\frac{3t_1-4}{t_1-5}=\frac{3t_2-4}{t_2-5}}}_{3t_1t_2-15t_1-4t_2+20=3t_1t_2-4t_1-15t_2+20} \Longrightarrow t_1 = t_2$$

$$-15t_1-4t_2=-4t_1-15t_2$$

$$\Rightarrow 15t_2-4t_2=15t_1-4t_1 \Rightarrow 11t_1=11t_2$$

$\Rightarrow t_1 = t_2$ *Tiene inversa*

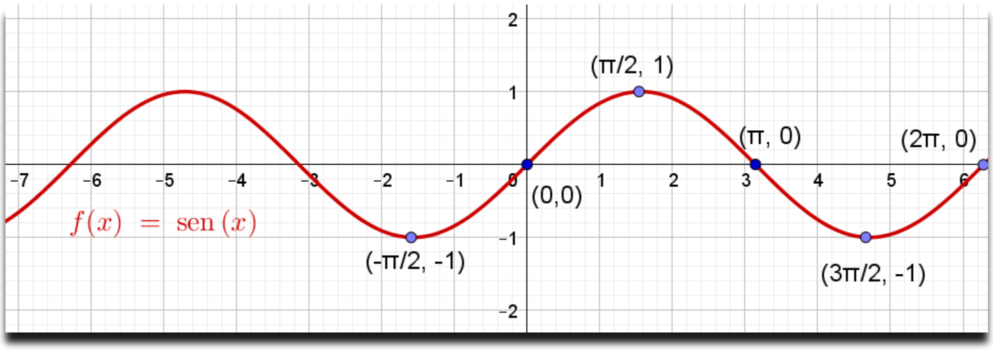
$$\Longrightarrow t = \frac{3y-4}{y-5} \Longrightarrow ty - 5t = 3y - 4 \Longrightarrow ty - 3y = 5t - 4 \Longrightarrow y(t-3) = 5t - 4$$

$$\Longrightarrow y = \frac{5t-4}{t-3} = g^{-1}(t)$$

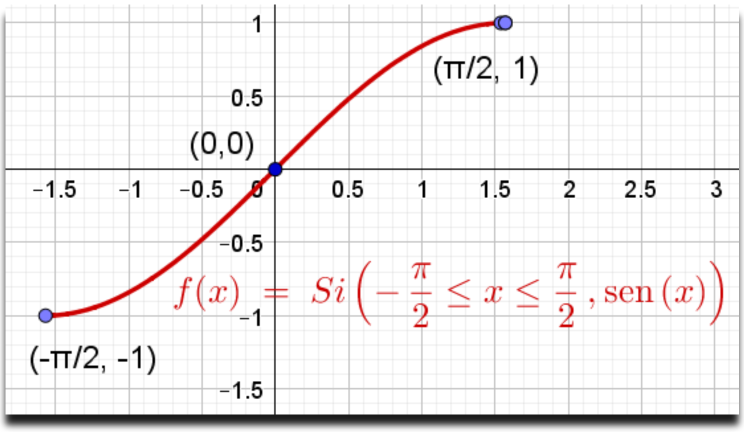
2.13. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Ejemplo 51.6.: Halle la inversa de la función f(x)=senx y grafique ambas. Hallemosle el dominio de ambas funciones

Solución: La siguiente es la gráfica de la función f(x)=senx. Obsevese que el dominio es D={xЄR}; y no es función inyectiva



Por lo tanto para poderle hallar la inversa debemos limitar el dominio D={xЄR/$-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$}



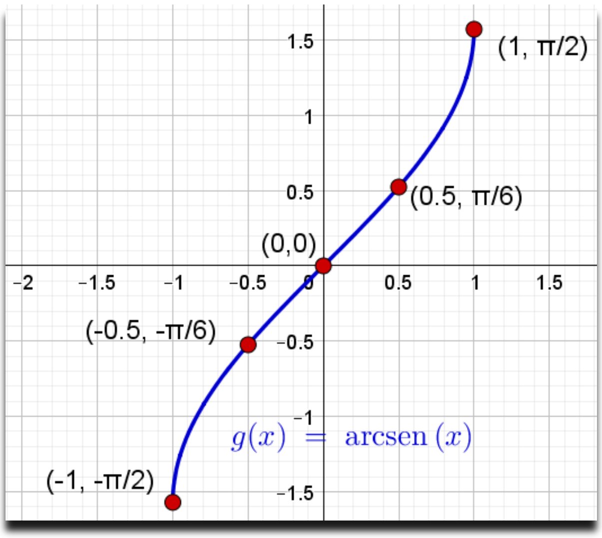
Obsérvese que a la función de ésta gráfica ya si le podemos hallar la inversa porque tenemos una función inyectiva

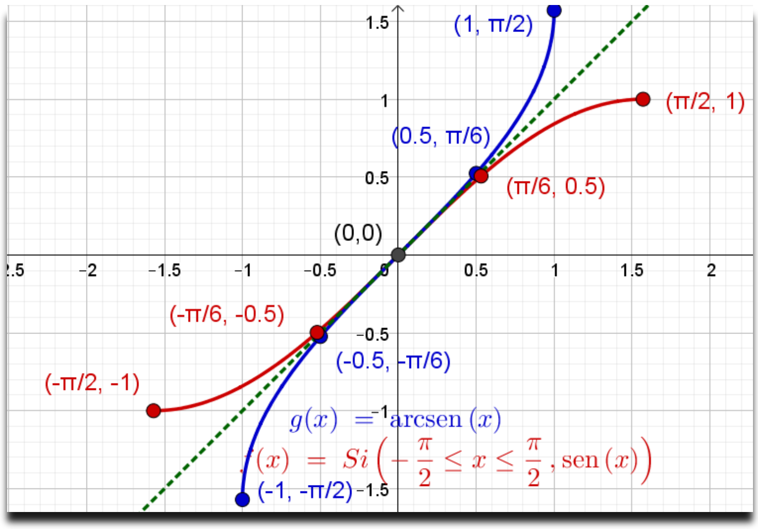
$$\mathrm{f(x) = y = senx, \ \ si\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}\right]}$$

$$\mathrm{f^{-1}(x) = x = seny}$$

$$\mathrm{f^{-1}(x) = y = arc.senx, \ \ si\ x \in [-1, \ \ 1]}$$

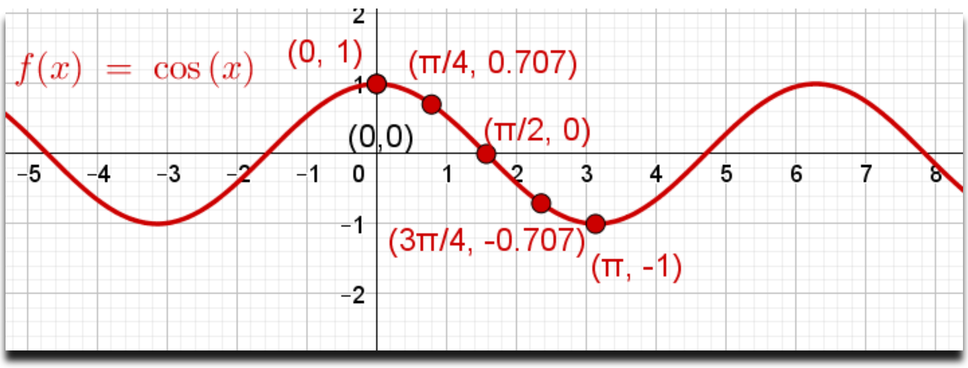
x	-1	-0.5	0	0.5	1
y	-π/2	- π/6	0	π/6	π/2
	-90^0	-30^0		30^0	90^0



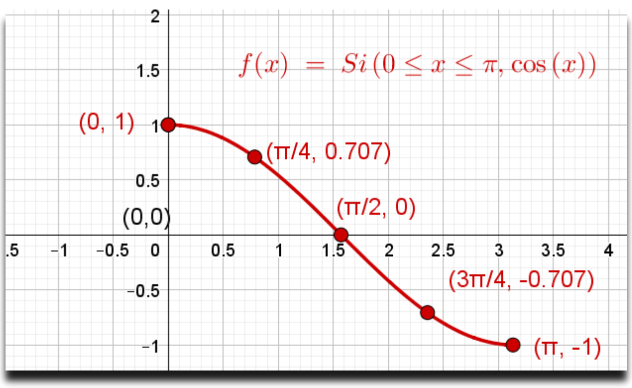


<u>Ejemplo 51.7.:</u> Halle la inversa de la función f(x)=cosx y grafique ambas. Hallemosle el dominio de ambas funciones

Solución: La siguiente es la gráfica de la función f(x)=cosx. Obsevese que el dominio es D={xЄR}; y no es función inyectiva



Por lo tanto para poderle hallar la inversa debemos limitar el dominio D={xЄR/$0 \leq x \leq \pi$}



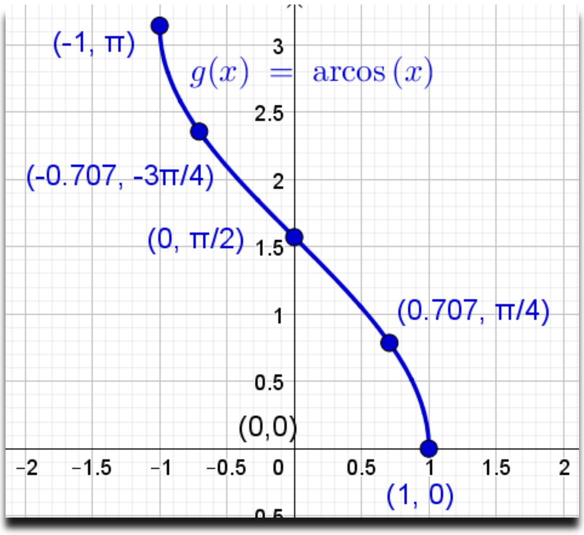
Obsérvese que a la función de ésta gráfica ya si le podemos hallar la inversa porque tenemos una función inyectiva

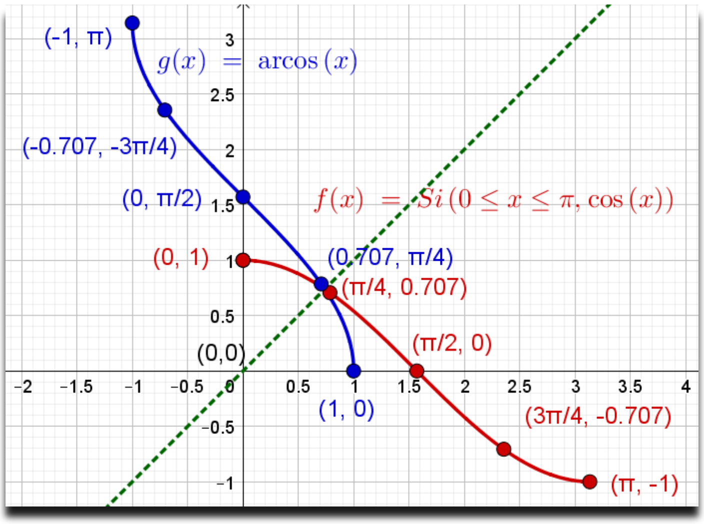
$$f(x) = y = \cos x, \quad \text{si } x \in [0, \ \pi \ ]$$

$$f^{-1}(x) = x = \cos y$$

$f^{-1}(x) = y = \text{arc.}\cos x, \quad \text{si } x \in [-1, \ 1]$

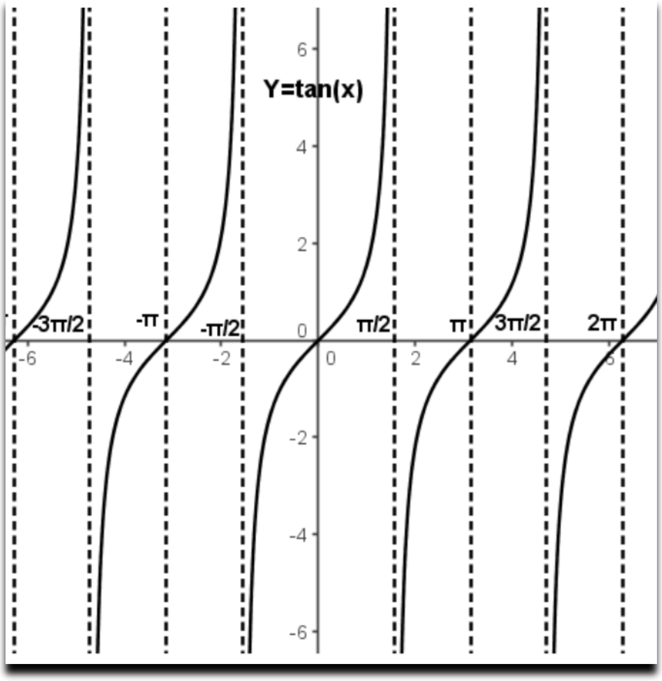
x	1	0.707	0	-0.707	-1
y	0	π/4	π/2	3π/4	π
		45^0	90^0	30^0	180^0



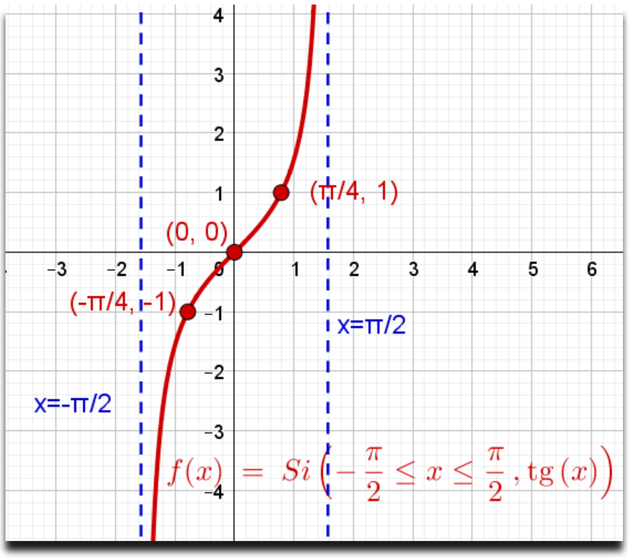


Ejemplo 51.8.: Halle la inversa de la función f(x)=tanx y grafique ambas. Hallemosle el dominio de ambas funciones

Solución: La siguiente es la gráfica de la función f(x)=tanx. Obsevese que el dominio es $D = \{x \in \Re / x \neq \pm\pi/2; \pm 3\pi/2; ...\}$; y no es función inyectiva



Por lo tanto para poderle hallar la inversa debemos limitar el dominio



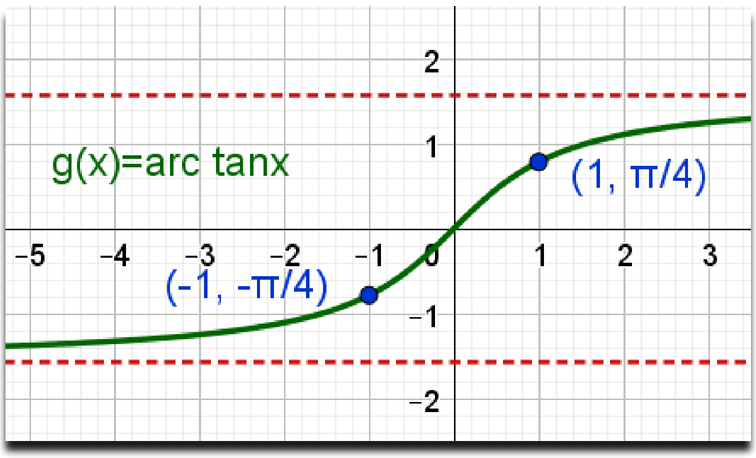
Obsérvese que a la función de ésta gráfica ya si le podemos hallar la inversa porque tenemos una función inyectiva

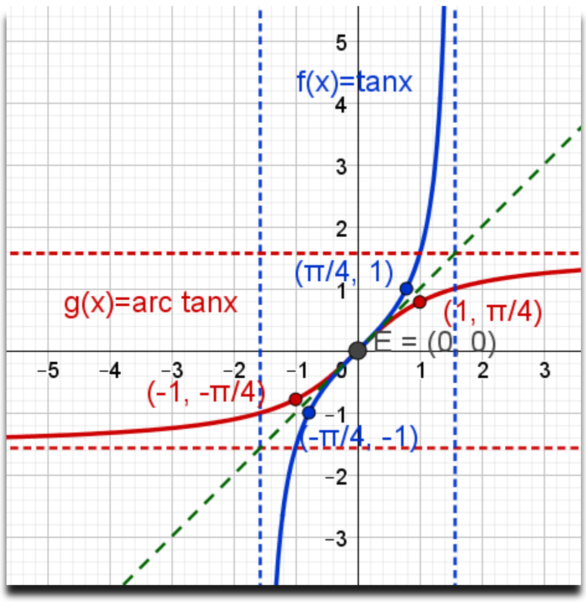
$$f(x) = y = \tan x, \quad \text{si } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{-1}(x) = x = \tan y$$

$$f^{-1}(x) = y = \text{arc.}\tan x, \quad \text{si } x \in (-\infty, \infty)$$

x	-∞	-1	0	1	∞
y	$(\pi/2)^+$	-π/4	0	π/4	$(\pi/2)^-$
		45^0		45^0	

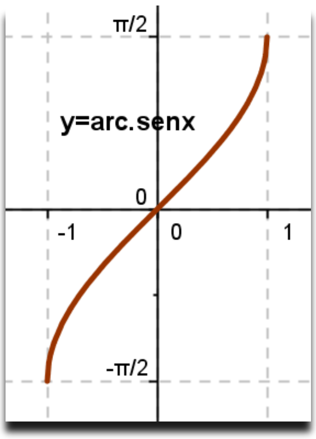


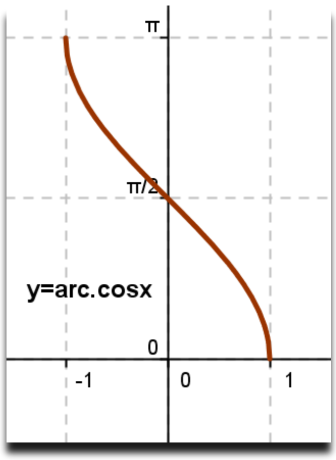


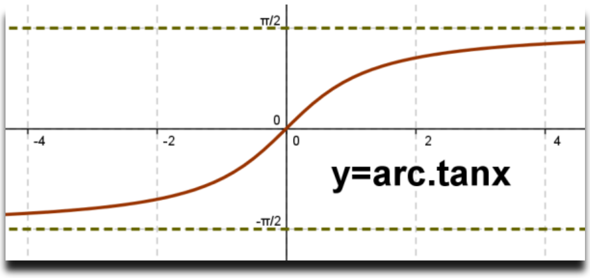
Funciones	**Dominio**	**Rango**
$y = \text{arc.sen}x \Leftrightarrow \text{sen}y = x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$
$y = \text{arc.cos}x \Leftrightarrow \cos y = x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \text{arc.tan}x \Leftrightarrow \tan y = x$	$-\infty < x < \infty$	$-\pi/2 < y < \pi/2$
$y = \text{arc.cot}x \Leftrightarrow \cot y = x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$
$y = \text{arc.sec}x \Leftrightarrow \sec y = x$	$x \leq -1,\ x \geq 1$	$0 \leq y \leq \pi,\ y \neq \pi/2$
$y = \text{arc.csc}x \Leftrightarrow \csc y = x$	$x \leq -1,\ x \geq 1$	$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2,\ y \neq 0$

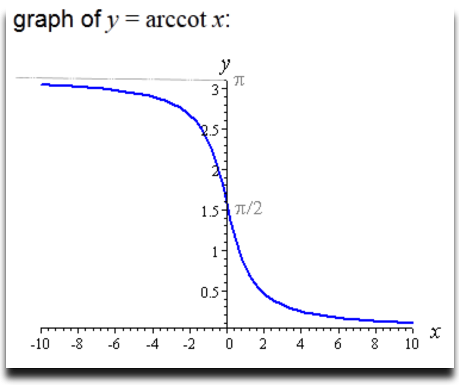
Este debe ser el dominio y rango para que sean funciones, e inyectivas

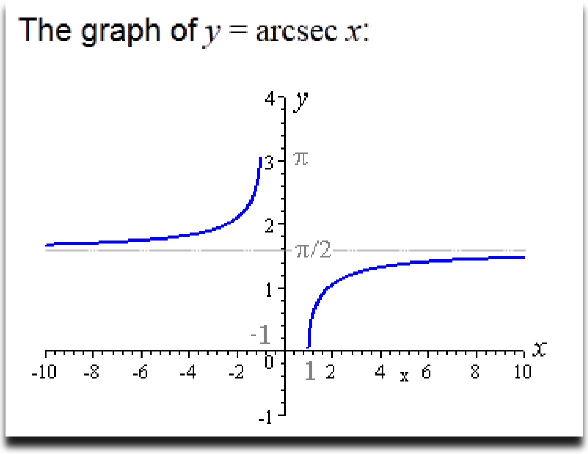
(para que una función tenga inversa tiene que ser inyectiva).

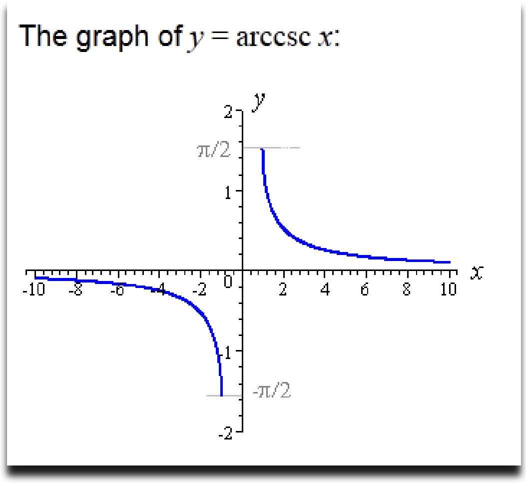












2.14. LA FUNCION EXPONENCIAL

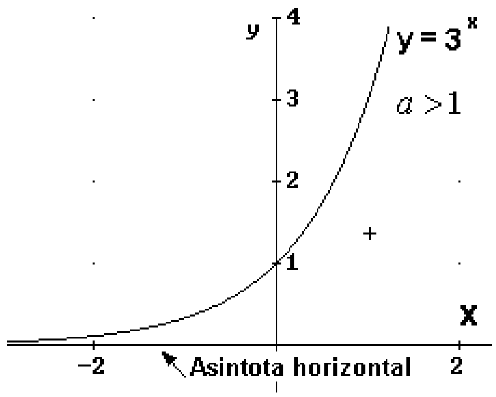
Se llama función exponencial de base "a" a toda función de la forma $f(x)=a^x$, donde

$a \in R^+$ ("a" constante) y $x \in R$.

Ejemplo 51: Graficar $f(x)=3^x$

Solución:

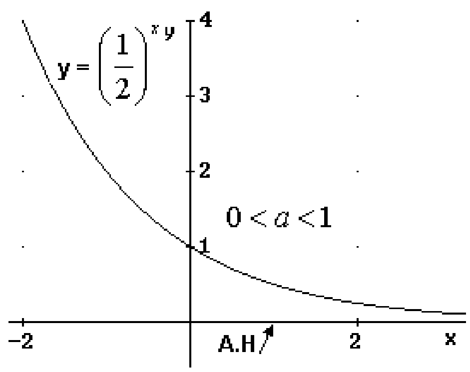
x	-2	-1	0	1	2	-3	$-\infty$
3^x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	$\frac{1}{27}$	$\to 0$



Ejemplo52: Graficar: $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Solución:

x	-2	-1	0	1	2	3	∞
2^{-x}	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\to 0$

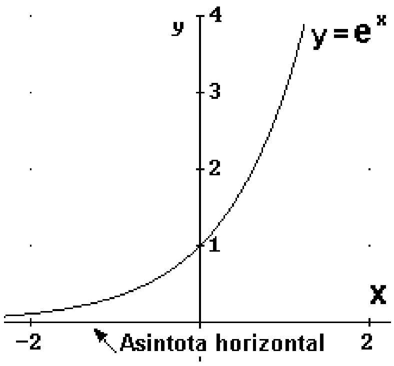


Hay un tipo de función exponencial especial donde $a=e$ $\qquad e = 2.71828182845...$

Ejemplo 53: Graficar $f(x)=e^x$

Solución:

x	-2	-1	0	1	2
e^x	0.14	0.37	1	2.72	7.39



Definición: Si $b>0,\ b\neq 1$ y $x\in R^+$, $\Rightarrow y=\log_b x \Leftrightarrow b^y=x$

2.15. LA FUNCION LOGARITMICA

La función logarítmica es la función inversa dela función exponencial

$$y = a^x \Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{log_a y = x}_{log_a x = y}}$$

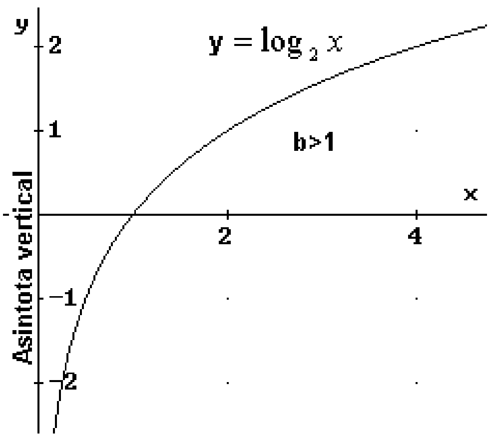
Ejemplo 54: Graficar: $f(x)=\log_2 x$

Solución: $y=\log_2 x \Leftrightarrow 2^y = x$

y	-2	-1	0	1	2	-3	$-\infty$
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	$\frac{1}{8}$	$\to 0$

$\log_2 x = -1 \Leftrightarrow 2^{-1} = x = \frac{1}{2}$

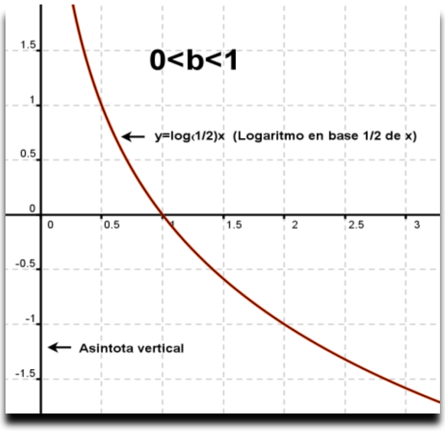
$\log_2 x = -2 \Leftrightarrow 2^{-2} = x = \frac{1}{4}$



Ejemplo 55: Graficar: $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

Solución:

x	-2	-1	0	1	2	∞
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\to 0$



2.15.1. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS.

$$\boxed{\log_b A = \log_b B \Leftrightarrow A = B}$$

Si $b > 0$ y $b \neq 1, \Rightarrow b^{\log_b u} = u$

$$\boxed{\log_b b = 1} \quad \boxed{\log_b 1 = 0}$$

Si $b > 0$ y $b \neq 1$, y si $A, B \in R^+$,

$\Rightarrow$ 1. $\log_b (A \times B) = \log_b A + \log_b B$

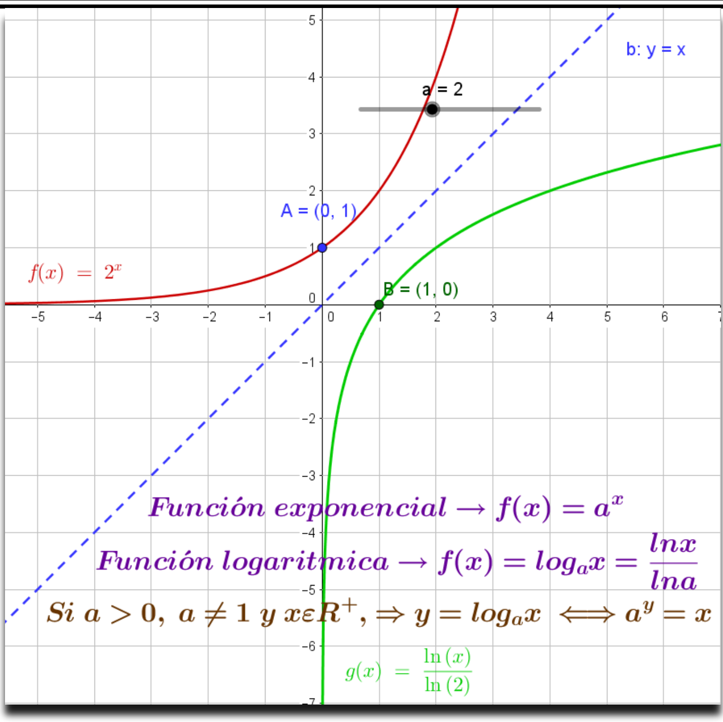
2. $\log_b \left(\frac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b B$

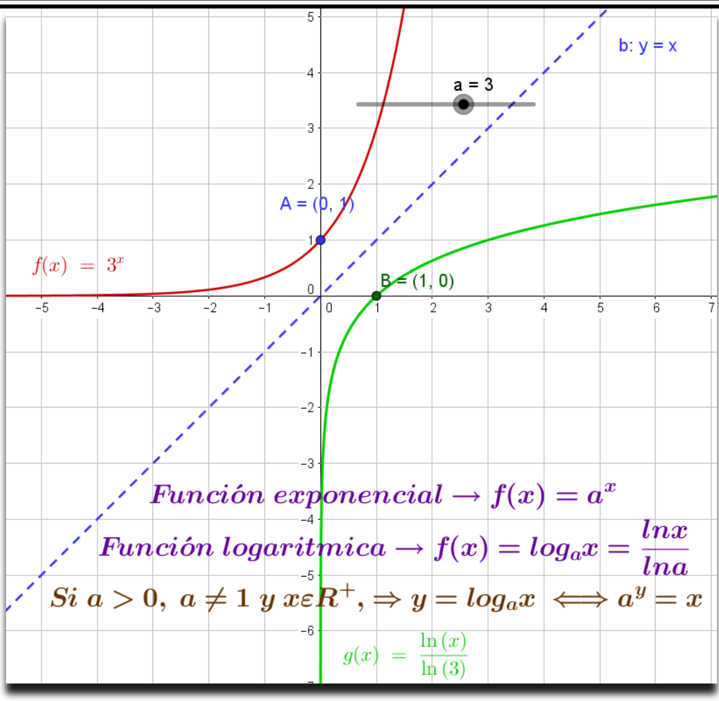
3. $\log_b A^n = n \log_b A, \quad \forall_n \in R$

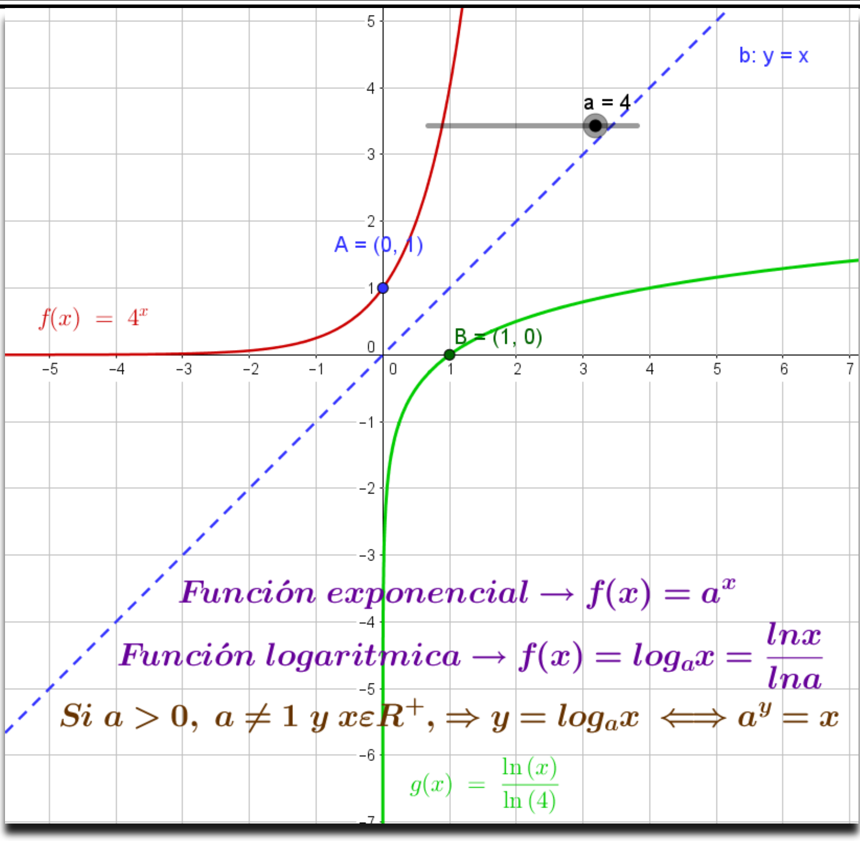
1. **Logaritmo de un producto** es igual a la suma de sus logaritmos.
2. **Logaritmo de un cociente** es igual a la resta de sus logaritmos.
3. **Logaritmo de una potencia** es igual a la potencia multiplicada por su logaritmo.

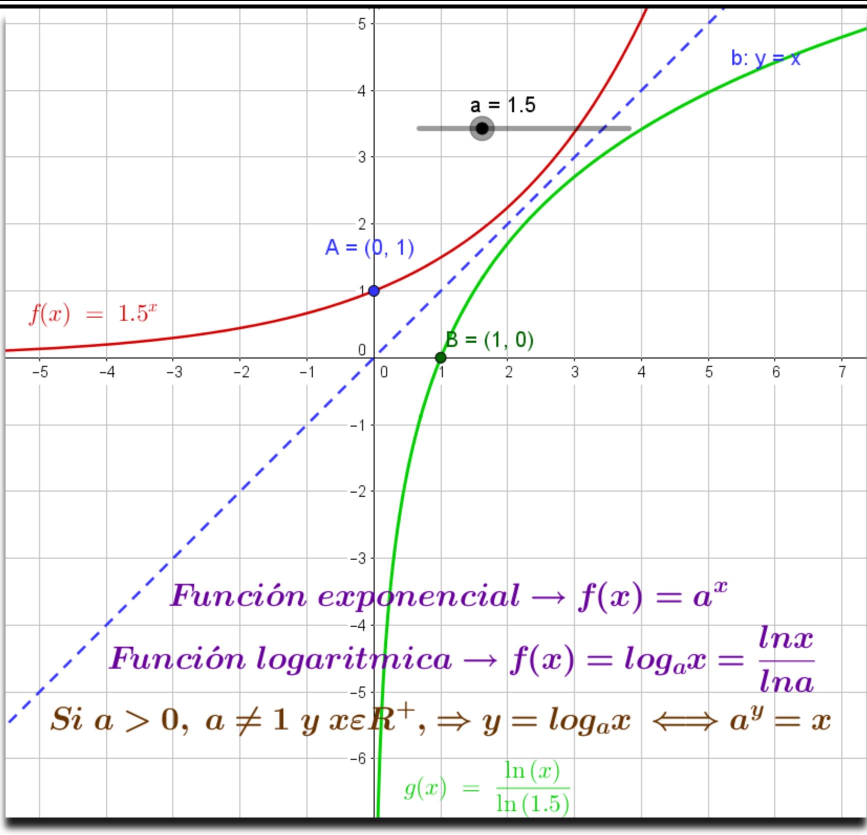
No confundir:

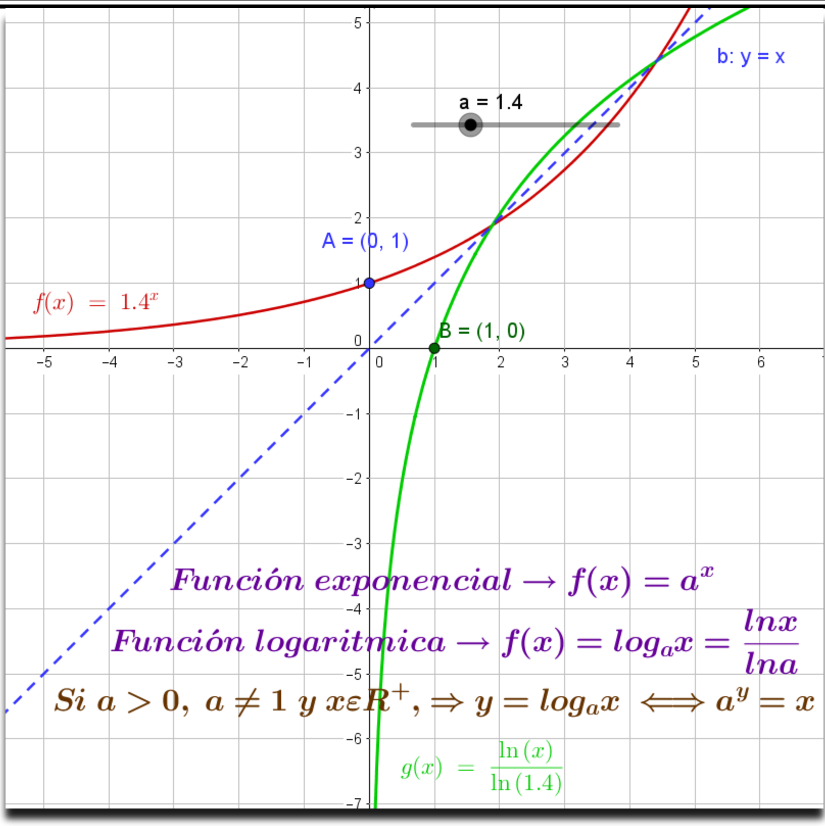
$$\log_b (A + B) \neq \log_b A + \log_b B \quad (a)$$
$$\log_b (A \times B) \neq \log_b A \times \log_b B \quad (b)$$
$$\log_b \left(A/B\right) \neq \log_b A / \log_b B \quad (c)$$
$$\log_b A^n \neq (\log_b A)^n \quad (d)$$

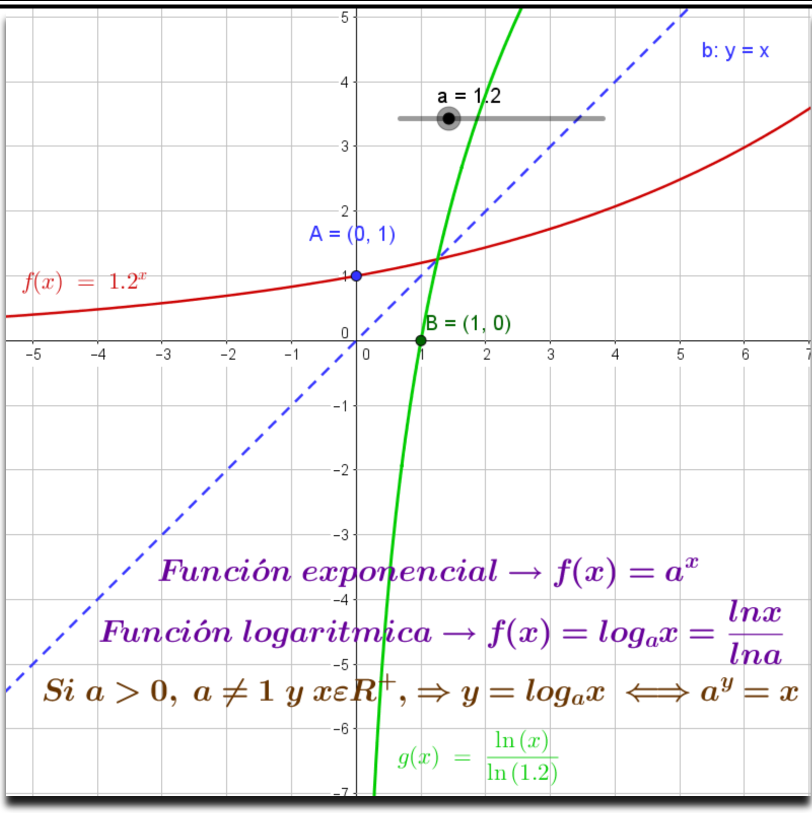

b: y = x
a = 2
A = (0, 1)
f(x) = 2^x
B = (1, 0)
Función exponencial → f(x) = a^x
Función logarítmica → f(x) = log_a x = lnx / lna
Si a > 0, a ≠ 1 y xεR⁺, ⇒ y = log_a x ⟺ a^y = x
g(x) = ln(x) / ln(2)

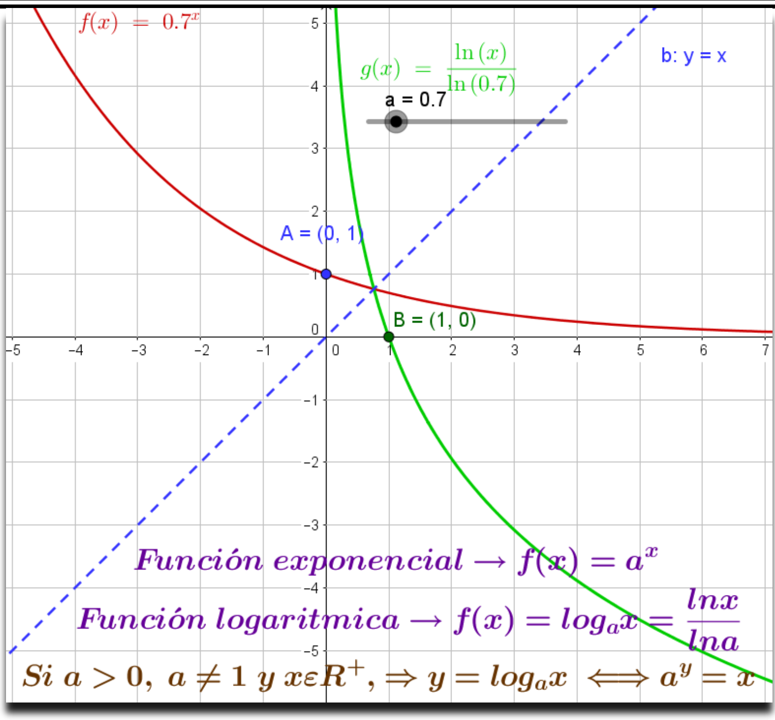

b: y = x
a = 3
A = (0, 1)
f(x) = 3^x
B = (1, 0)
Función exponencial → f(x) = a^x
Función logarítmica → f(x) = log_a x = lnx / lna
Si a > 0, a ≠ 1 y xεR⁺, ⇒ y = log_a x ⟺ a^y = x
g(x) = ln(x) / ln(3)

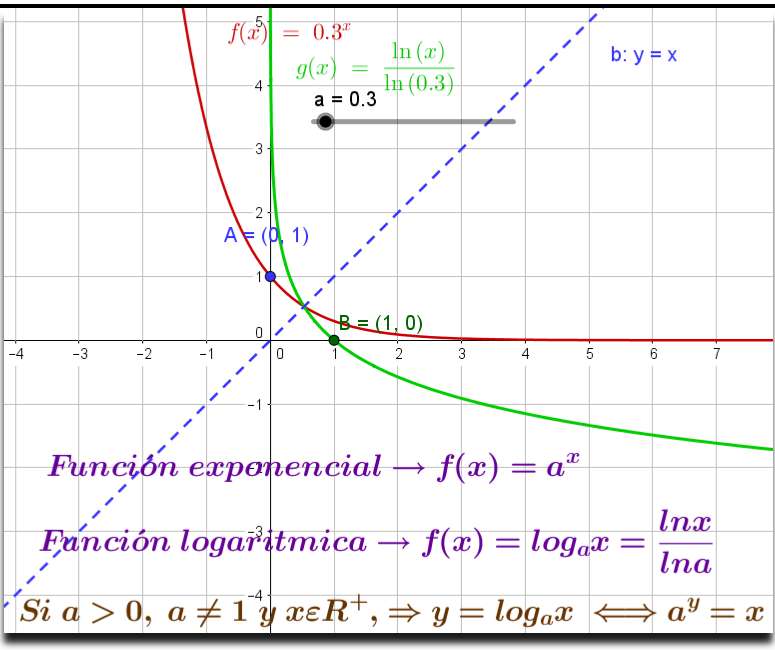

b: y = x
a = 4
A = (0, 1)
$f(x) = 4^x$
B = (1, 0)
Función exponencial → $f(x) = a^x$
Función logaritmica → $f(x) = log_a x = \frac{lnx}{lna}$
Si $a > 0,\ a \neq 1\ y\ x\varepsilon R^+, \Rightarrow y = log_a x \iff a^y = x$
$g(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(4)}$


b: y = x
a = 1.5
A = (0, 1)
$f(x) = 1.5^x$
B = (1, 0)
Función exponencial → $f(x) = a^x$
Función logaritmica → $f(x) = log_a x = \frac{lnx}{lna}$
Si $a > 0,\ a \neq 1\ y\ x\varepsilon R^+, \Rightarrow y = log_a x \iff a^y = x$
$g(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(1.5)}$


b: y = x
a = 1.4
A = (0, 1)
$f(x) = 1.4^x$
B = (1, 0)
$Función\ exponencial \rightarrow f(x) = a^x$
$Función\ logarítmica \rightarrow f(x) = log_a x = \frac{lnx}{lna}$
$Si\ a > 0,\ a \neq 1\ y\ x \varepsilon R^+, \Rightarrow y = log_a x \iff a^y = x$
$g(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(1.4)}$


b: y = x
a = 1.2
A = (0, 1)
$f(x) = 1.2^x$
B = (1, 0)
$Función\ exponencial \rightarrow f(x) = a^x$
$Función\ logarítmica \rightarrow f(x) = log_a x = \frac{lnx}{lna}$
$Si\ a > 0,\ a \neq 1\ y\ x \varepsilon R^+, \Rightarrow y = log_a x \iff a^y = x$
$g(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(1.2)}$





Obsérvese que en las gráficas anteriores la recta y=x es el eje de simetría de las funciones $y = a^x \ \ y\ de\ \ y = log_a x$

Ejemplo 56. La velocidad de un paracaidista en el tiempo *t* está representada por $v(t) = 80(e^{0.2t} - 1)$, Donde *t* está dada en segundos y *V* en pies / s.

a. Determinar la velocidad inicial del paracaidista.

b. Determinar la velocidad del paracaidista después de transcurridos 5 y 10 segundos.

c. ¿Cuándo la velocidad del paracaidista es de 26,4 pies/s?

Solución:

a. $v(t)=80(e^{0.2t}-1)\rightarrow$ $v(0)=80(e^{0.2*0}-1) \rightarrow$ $v(0)=80(e^{0}-1) \rightarrow$
$v(0)=80(1-1)=80*0=0$

$b.\, v(5)=80(e^{0.2*5}-1) \rightarrow$ $v(5)=80(e^{1}-1) = 137.5\dfrac{pies}{seg}.$

$v(10)=80(e^{0.2*10}-1) \rightarrow$ $v(10)=80(e^{2}-1) = 511.1\dfrac{pies}{seg}$

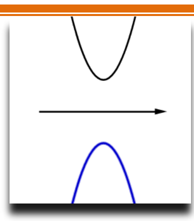
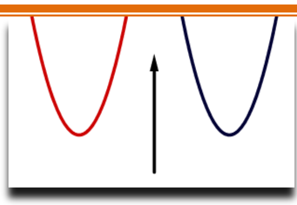
$c.\;\; v(t)=80(e^{0.2t}-1)\rightarrow\; 26.4=80(e^{0.2t}-1) \rightarrow \frac{26.4}{80}+1=(e^{0.2t})$

$\rightarrow\; \ln(\frac{26.4}{80}+1)=ln(e^{0.2t}) \;\rightarrow\; \ln\left(\frac{26.4}{80}+1\right)=0.2t*ln(e^{1})$

$\rightarrow \dfrac{\ln\left(\frac{26.4}{80}+1\right)}{0.2}=t \quad \rightarrow t=1.43\; seg.$

2.16. TRANSFORMACION DE FUNCIONES

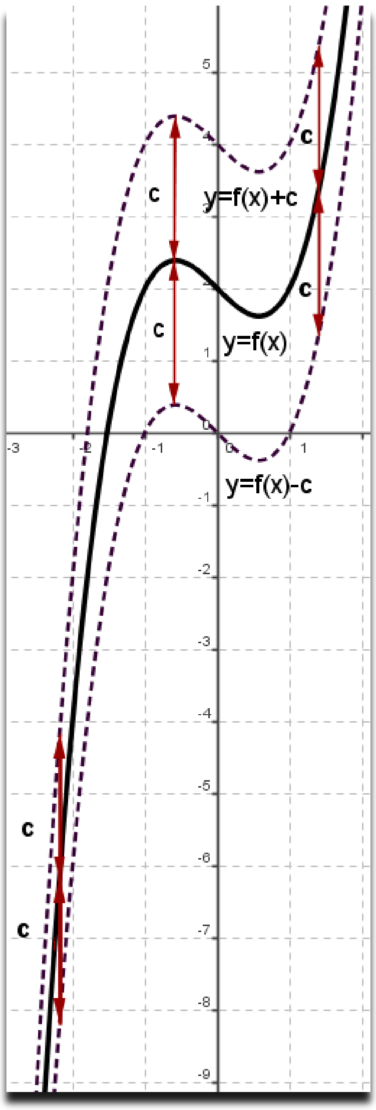
Resumen

(a) Desplazamiento vertical	Si y=f(x) $\Downarrow$ y=f(x) **+ c**	$\uparrow$ ***c*(+)** $\downarrow$ **c(-)**
(b) Desplazamiento horizontal	Si y=f(x) $\Downarrow$ y=f(x **+ c)** $\boldsymbol{x+c=0 \Rightarrow x=-c}$	$\boldsymbol{x=-c}\,(-)\leftarrow$ $\boldsymbol{x=-c}\,(+)\rightarrow$
(c) Reflexión en el eje x	* Si y=f(x) $\Downarrow$ y= **-** f(x)	
(d) Reflexión en el eje y	* Si y=f(x) $\Downarrow$ y= f (**-** x)	
(e) Estiramiento y acortamiento vertical	** Si y=f(x) $\Downarrow$ y= **c.** f (x)	**Si c>1 se tiene un estiramiento vertical. Si 0<c<1 se tiene un acortamiento vertical**
(f) Estiramiento y acortamiento horizontal	** Si y=f(x) $\Downarrow$ y= f (**c.**x)	**Si c>1 se tiene un acortamiento horizontal. Si 0<c<1 se tiene un estiramiento horizontal**

* Si hay reflexión y desplazamiento al mismo tiempo; primero se realiza la reflexión y luego los desplazamientos.

** Si hay estiramiento y desplazamiento al mismo tiempo; primero se realiza el estiramiento y luego los desplazamientos.

Desplazamientos Verticales

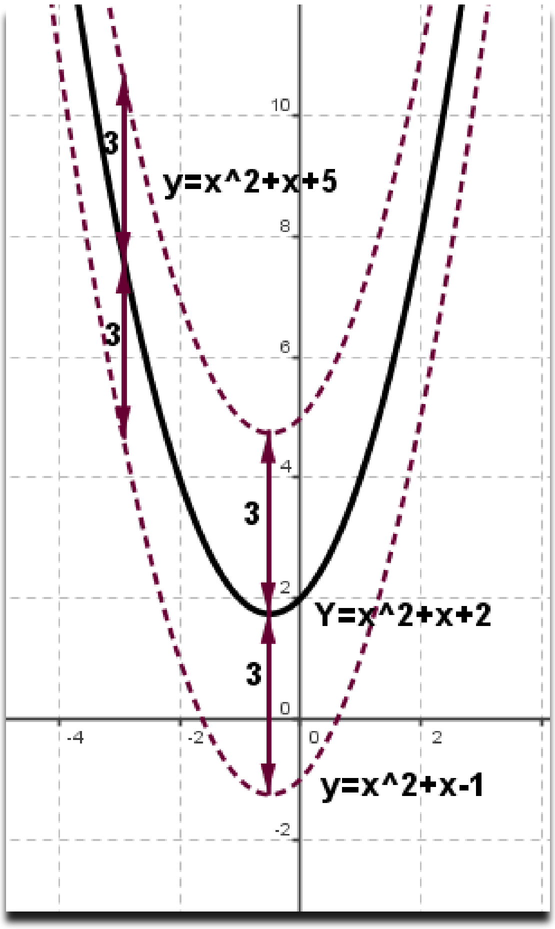


Ejemplo 59. Dada la gráfica de $f(x)=x^2+x+2$; grafique $h(x)=x^2+x+5$ y $k(x)=x^2+x-1$

Solución:

$$h(x) = \underbrace{x^2 + x + 2}_{f(x)} + 3 = f(x) + 3 \Rightarrow \uparrow 3$$

$$k(x) = \underbrace{x^2 + x + 2}_{f(x)} - 3 = f(x) - 3 \Rightarrow \downarrow 3$$



Desplazamientos Horizontales

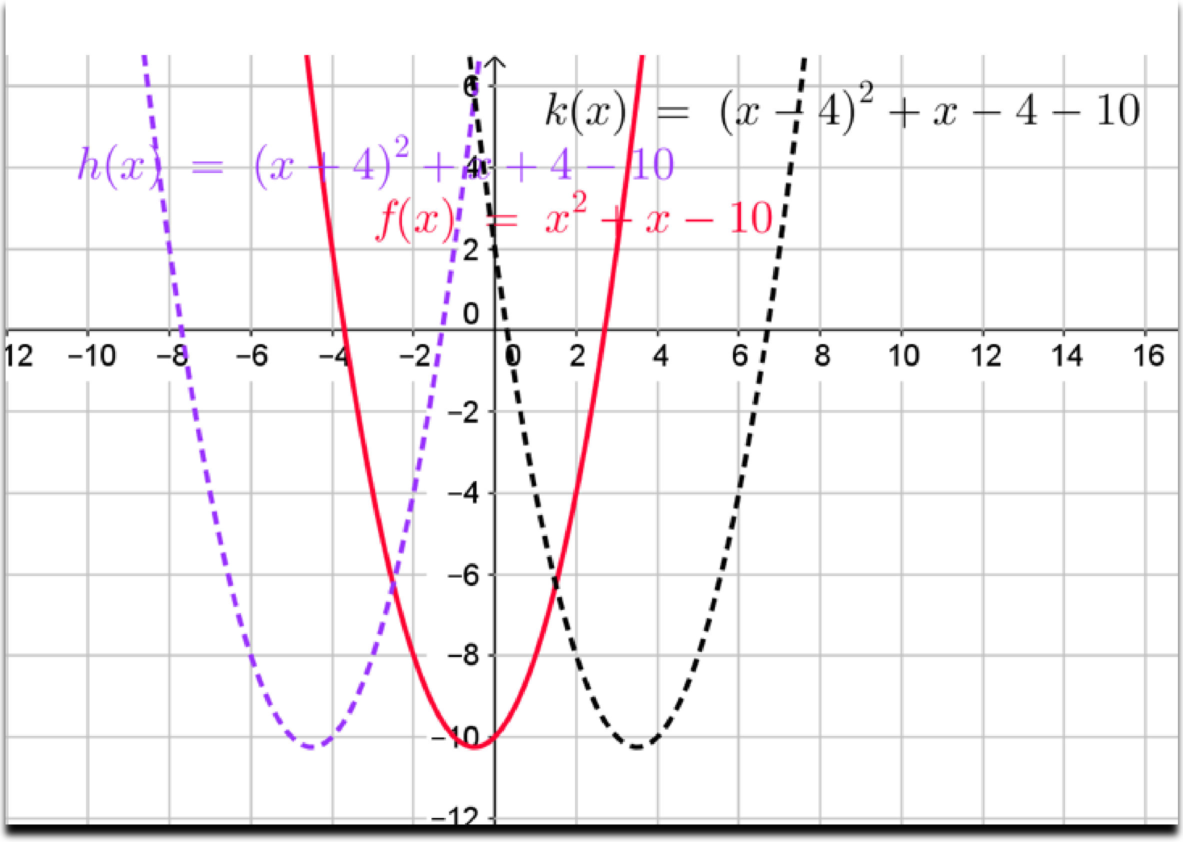
Ejemplo 60. Dada la gráfica de $f(x)=x^2+x-10$; grafique $h(x)=(x+4)^2+(x+4)-10$ y $k(x)=(x-4)^2+(x-4)-10$

Solución: $h(x) = \underbrace{(x + 4)^2 + (x + 4) - 10}_{f(x)} = f(x + 4)$; $\quad x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow \leftarrow 4$

(Desplazamiento horizontal hacia la izquierda)

$$k(x) = \underbrace{(x - \mathbf{4})^2 + (x - \mathbf{4}) - 10}_{f(x)} = f(x - \mathbf{4}); \qquad x - \mathbf{4} = 0 \Longrightarrow x = +4 \Longrightarrow \longrightarrow 4$$

(Desplazamiento horizontal hacia la derecha)



<u>Desplazamiento horizontal y vertical:</u>

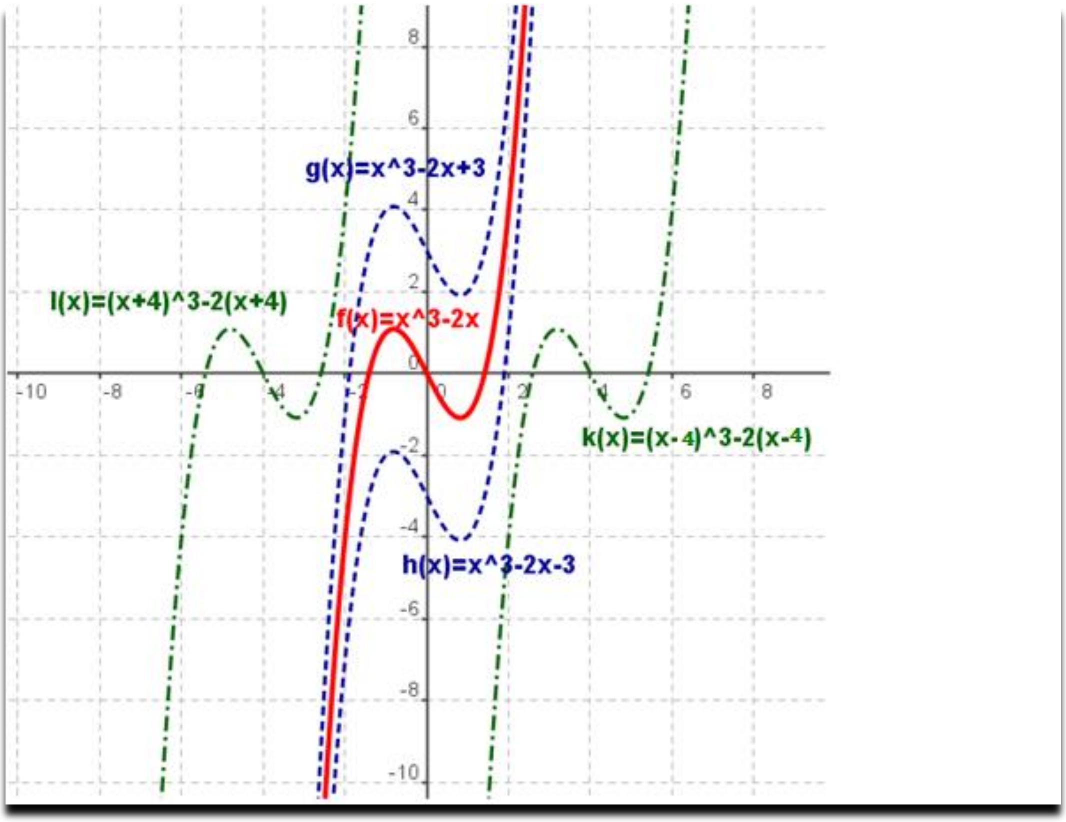
<u>Ejemplo 61.</u>

Desplazamiento vertical: f(x)= x^3-2x ⇒ f(x)= x^3-2x+c

Desplazamiento horizontal: f(x)= x^3-2x ⇒ f(x)= $(x+a)^3$-2(x+a)

Dada la gráfica de f(x)= x^3-2x; construya las gráficas g(x)= x^3-2x+3;

h(x)= x^3-2x-3; K(x)= $(x-3)^3$-2(x-3), I(x)= $(x+4)^3$-2(x+4)

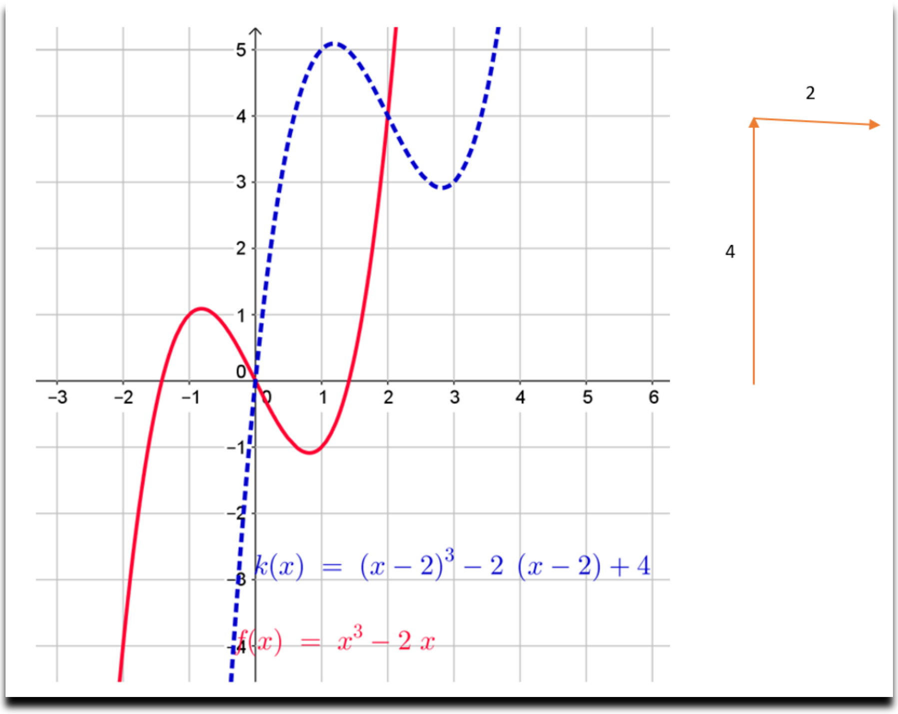


Ejemplo 62. Dada la gráfica de f(x)= x^3-2x; construya la gráfica k(x)= $(x-2)^3$-2(x-2)+4

Solución: $k(x) = \underbrace{(x-2)^3 - 2(x-2)}_{f(x)} + 4 = f(x-2) + 4; \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \longrightarrow 2$

(Desplazamiento horizontal)

$\uparrow 4$ **(Desplazamiento vertical)**



Ejemplo 63. Desplazamiento horizontal y vertical :

Dada la gráfica de $f(x)=x^2$; construya las gráficas

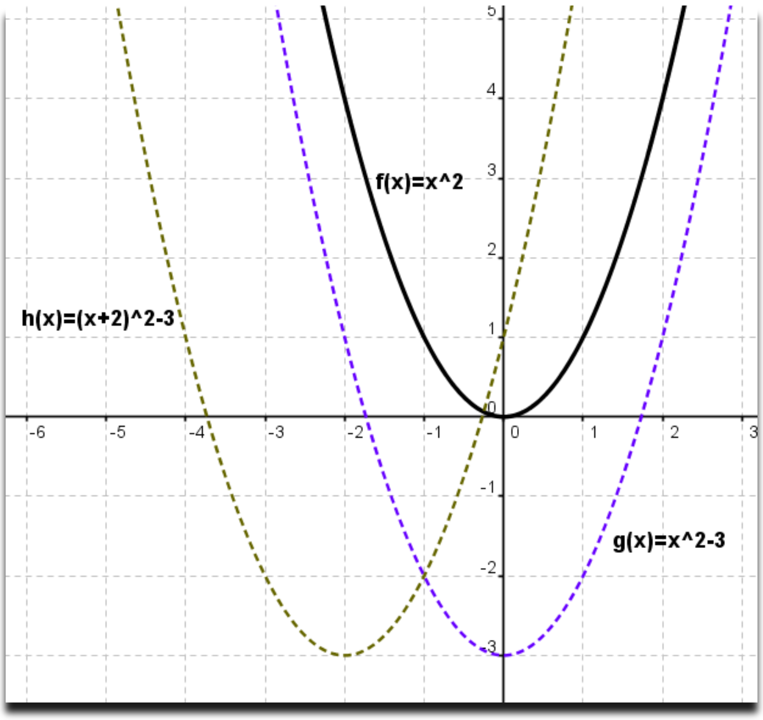
$g(x)= x^2-3$ y

$h(x)= (x+2)^2-3$

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$ ← -2

-3

-2

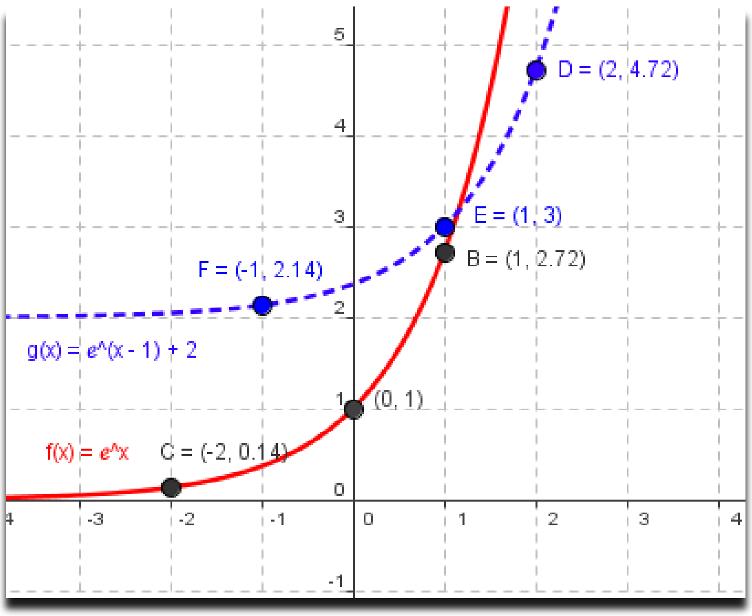


Ejemplo 64. A partir de la gráfica $f(x)=e^x$; Grafique $g(x)=e^{(x-1)}+2$.

Solución: Obsérvese que cada punto de la gráfica $f(x)=e^x$ tuvo un desplazamiento en "y" de 2 unidades y en "x" de 1 unidad

$x-1=0 \Rightarrow x = 1$ 2

1

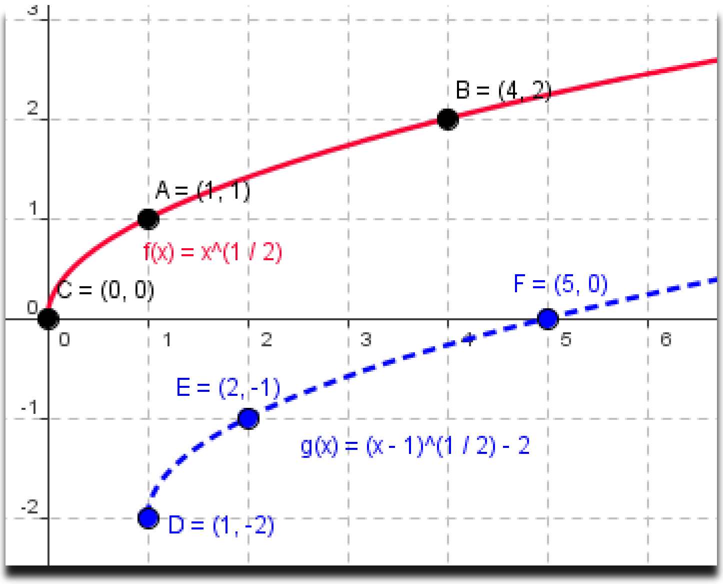


Ejemplo 65. A partir de la gráfica $f(x)=x^{(1/2)}$; Grafique $g(x)=(x-1)^{(1/2)}-2$.

Solución: Obsérvese que cada punto de la gráfica $f(x)=x^{(1/2)}$ tuvo un desplazamiento en "y" de -2 unidades y en "x" de 1 unidad.

x-1=0⇒ $x = 1$

2



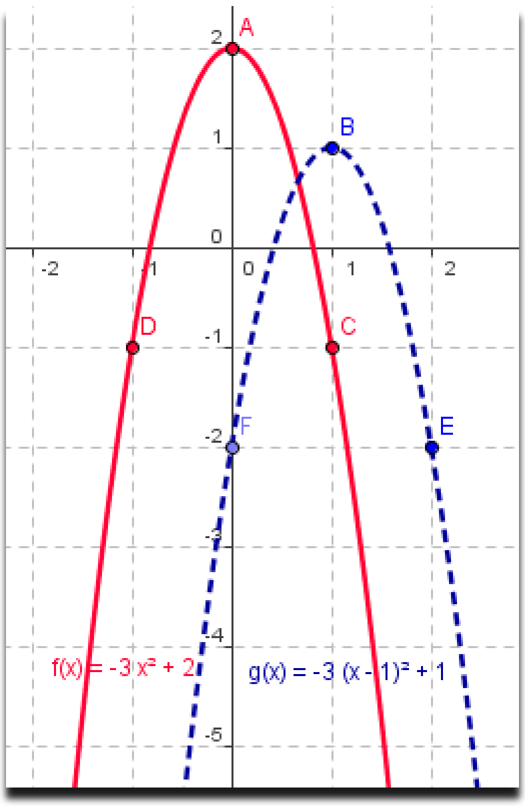
Ejemplo 66. A partir de la gráfica $f(x)= - 3x^2+2$; Grafique $g(x)= - 3(x-1)^2+1$.

Solución:

$$g(x) = \underbrace{-3(x-1)^2}_{f(x-1)} + 2 - 1$$

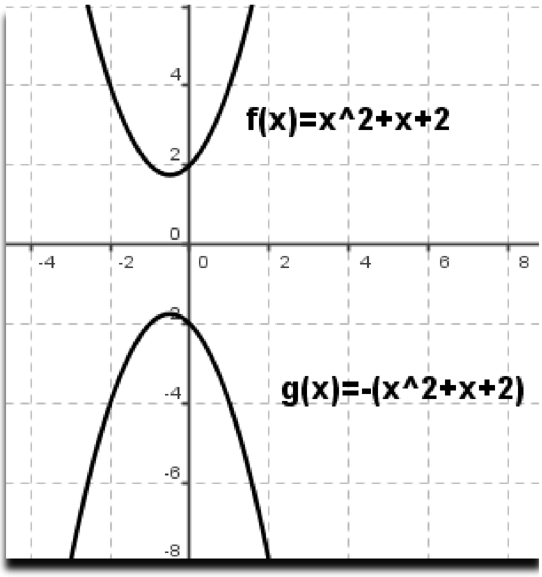
x-1=0⇒ $x = 1$

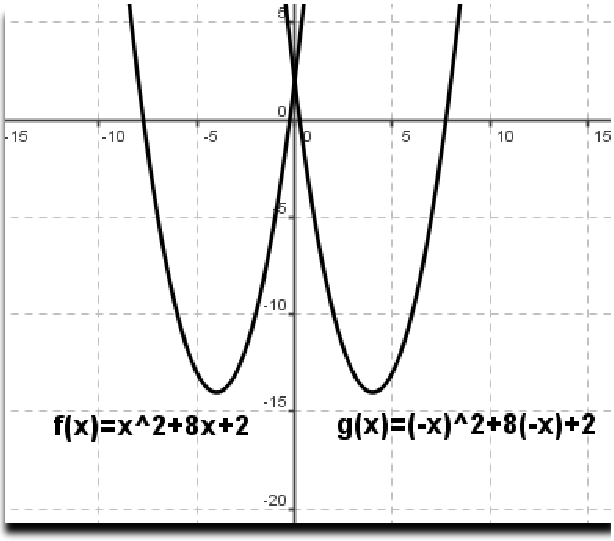
-1



Reflexión de gráficas

Si tenemos la gráfica y=f(x), la podemos reflejar en el eje "x", graficando y= - f(x); y la podemos reflejar en el eje "y", graficando y= f(-x)

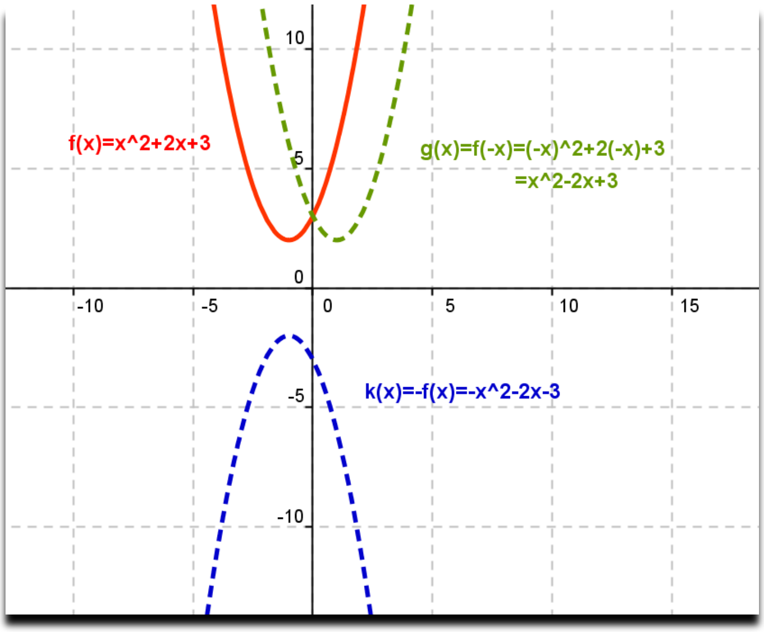




Reflexión en el eje "x" ***Reflexión en el eje "y"***

Ejemplo 67. Dada la gráfica $f(x)=x^2+2x+3$; grafique las reflejadas en el eje "x" y en el eje "y".

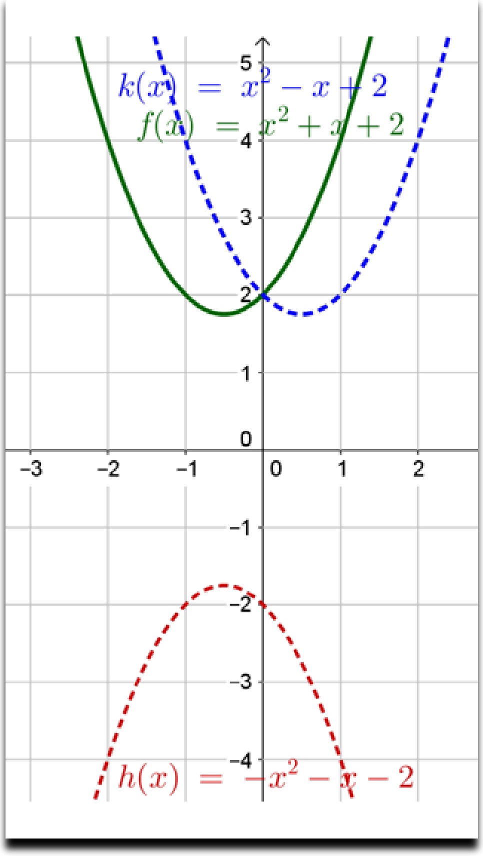
Solución:



Ejemplo 68. Dada la gráfica de $f(x)=x^2+x+2$; grafique $h(x)=-x^2-x-2$ y $k(x)=x^2-x+2$

Solución: $h(x) = -(\underbrace{x^2 + x + 2}_{f(x)}) = -f(x) \Rightarrow$ **reflexión en el eje "x"**;

$k(x) = (\underbrace{-x)^2 + (-x) + 2}_{f(x)}) = f(-x) \Rightarrow$ **reflexión en el eje "y"**



Ejemplo 69. Dada la gráfica $f(x)=x^3-2x^2+4$; grafique $k(x)=(-x-4)^3-2(-x-4)^2+1$

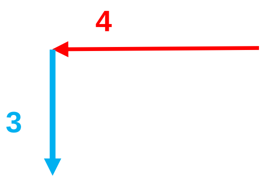
Solución: Como se observa, en esta grafica hay ***desplazamiento horizontal, vertical y reflexión en "y".***

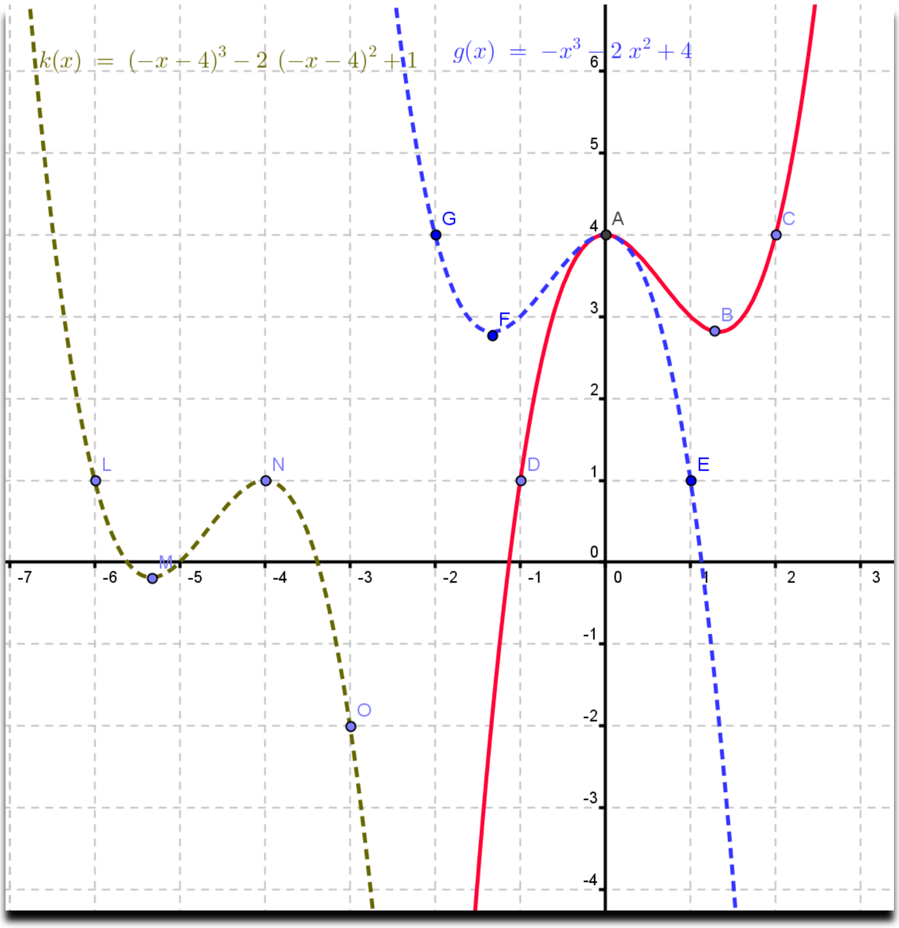
Lo primero es graficar la reflejada en "y": $g(x)=f(-x)=(-x)^3-2(-x)^2+4$; $g(x)=-x^3-2x^2+4$

Sobre ésta reflejada se hacen los desplazamientos vertical y horizontal.

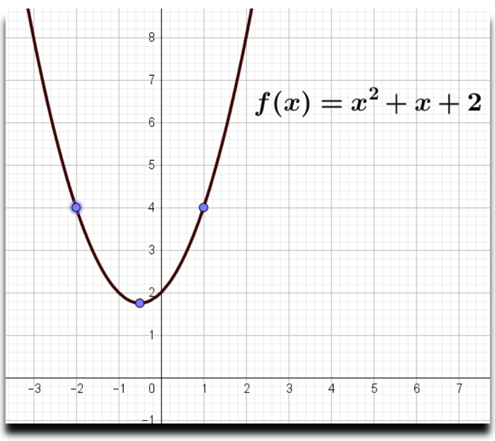
$$k(x) = \underbrace{(-x - 4)^3 - 2(-x - 4)^2 + 4}_{g(x-4)} - 3$$

-x-4=0 → x=-4; y de 4 para llegar a 1 se le resto 3; es decir la gráfica se desplazó 4 unidades hacia la izquierda y 3 unidades hacia abajo.





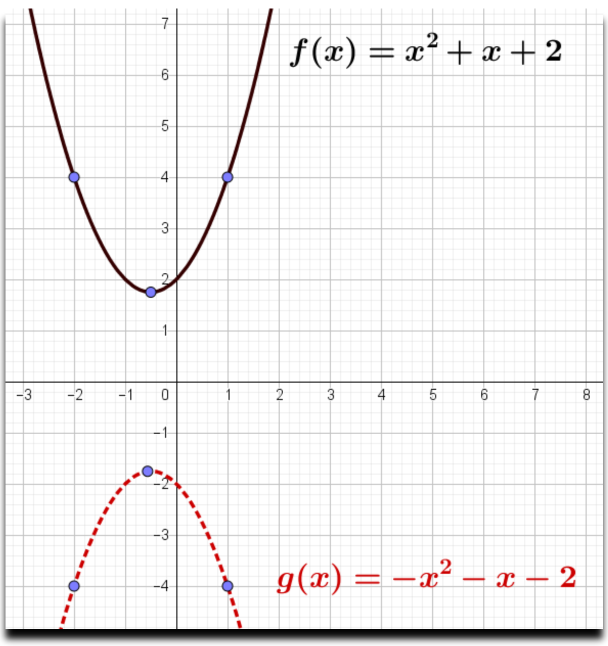
Ejemplo 70: Dada la gráfica siguiente



Grafique $k(x) = -(x+3)^2 - x - 7$

Solución: Esta grafica tiene reflexión en "x" y desplazamiento horizontal y vertical

Primero debemos graficar la reflejada:



Segundo; a partir de la reflejada $g(x) = -x^2 - x - 2$ se hacen los desplazamientos:

$$k(x) = \underbrace{-(x+3)^2 - (x+3) - 2}_{g(x+3)} + 3 - 5$$

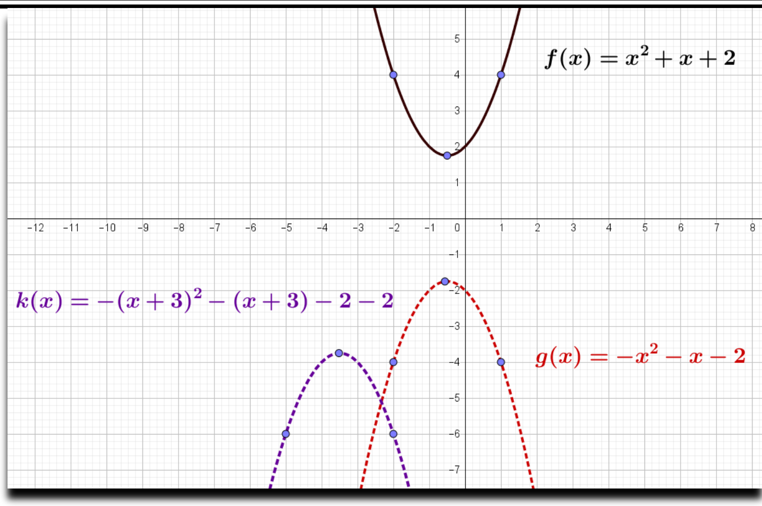
Obsérvese que ésta es la reflejada, pero donde está la "x" se cambia por "x+3"; entonces tendríamos:

$$k(x) = \underbrace{-(x+3)^2 - (x+3) - 2}_{g(x+3)-2} - 2$$

$$\boldsymbol{x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \leftarrow}$$

3

2



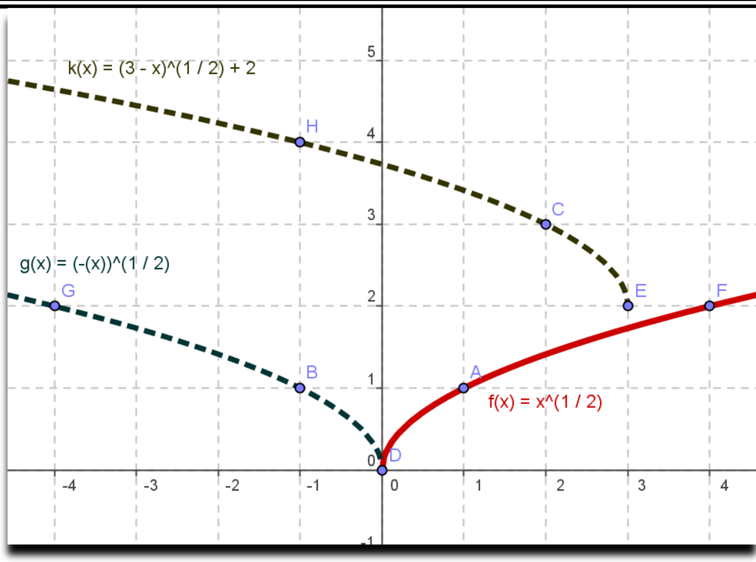
Ejemplo 71. Dada la gráfica

$f(x) = \sqrt{x}$; grafique

$k(x) = \sqrt{3-x} + 2$

Solución: En esta grafica hay ***desplazamiento horizontal, vertical y reflexión en "y".***

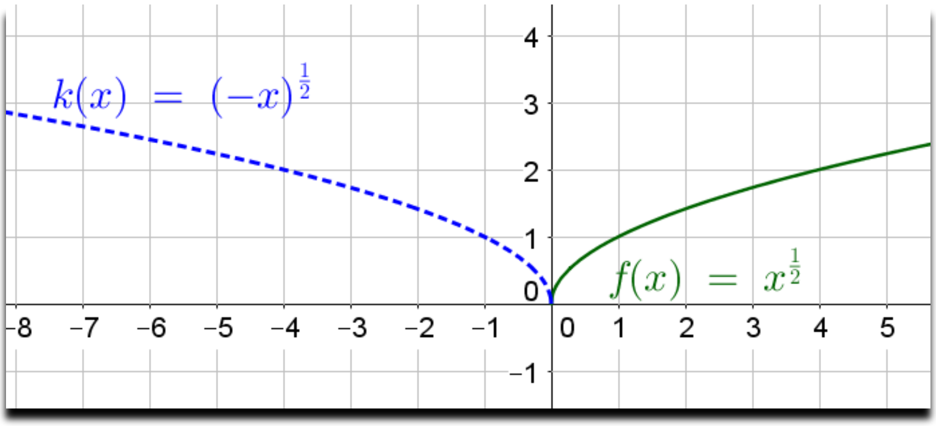
Grafico la reflejada en "y": $f(x) = \sqrt{-x}$; y luego se le hacen los dos desplazamientos.



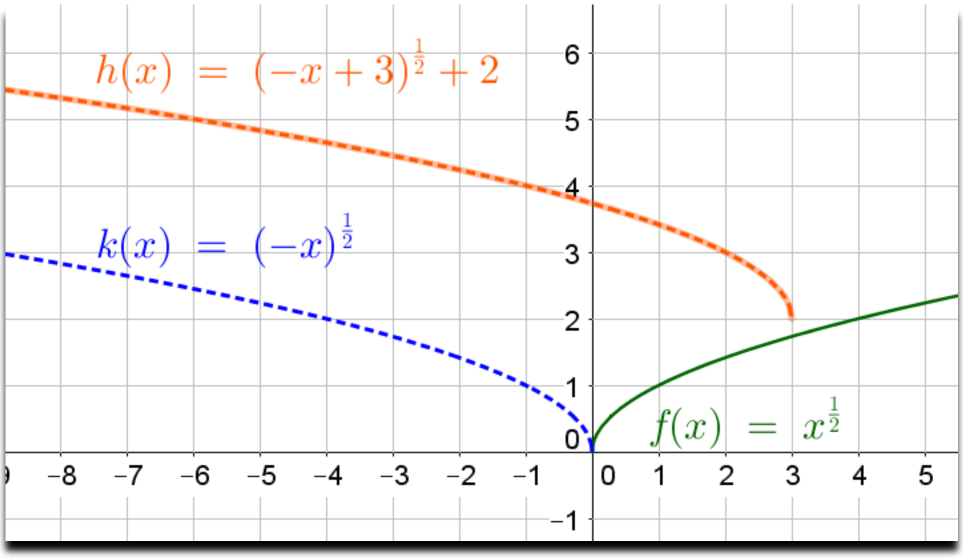
Para graficar $k(x) = \sqrt{3-x} + 2$; 3-x=0, → x=3; y de 0 para llegar a 2 se le sumo 2; es decir la gráfica se desplazó 3 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia arriba.

Ejemplo 72. Dada la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$;
Grafique: (a) $\text{h}(x) = \sqrt{3 - x} + 2$ y (b) $\text{l}(x) = -\sqrt{x + 3} - 4$

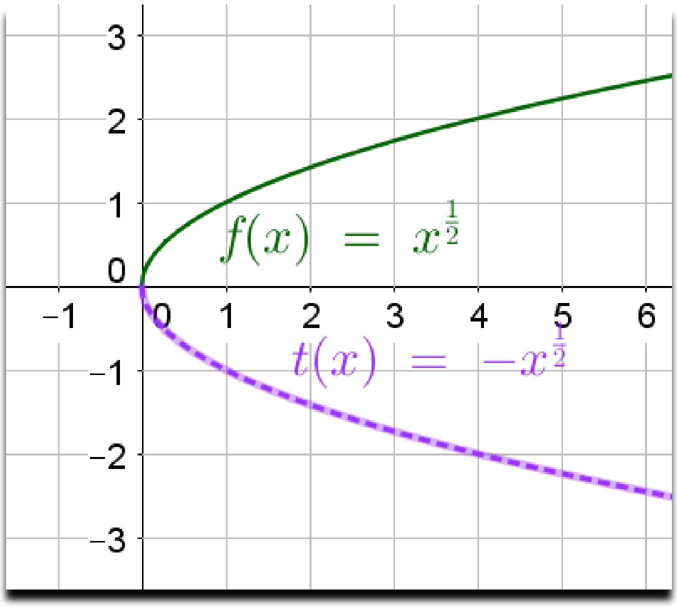
Solución: (a) $\text{k}(x) = \sqrt{-x} = \text{f}(-\text{x}) \implies$ **reflexión en el eje "y"** Primero graficamos la curva reflejada en el eje "y".



Ya con la curva reflejada en el eje "y", le hacemos los desplazamientos: $\text{h}(x) = \sqrt{\mathbf{3} - x} + \mathbf{2}$
$\mathbf{3 - x = 0 \implies x = 3 \implies \longrightarrow 3}$ (Desplazamiento horizontal)
$\uparrow \mathbf{2}$ **(Desplazamiento vertical)**



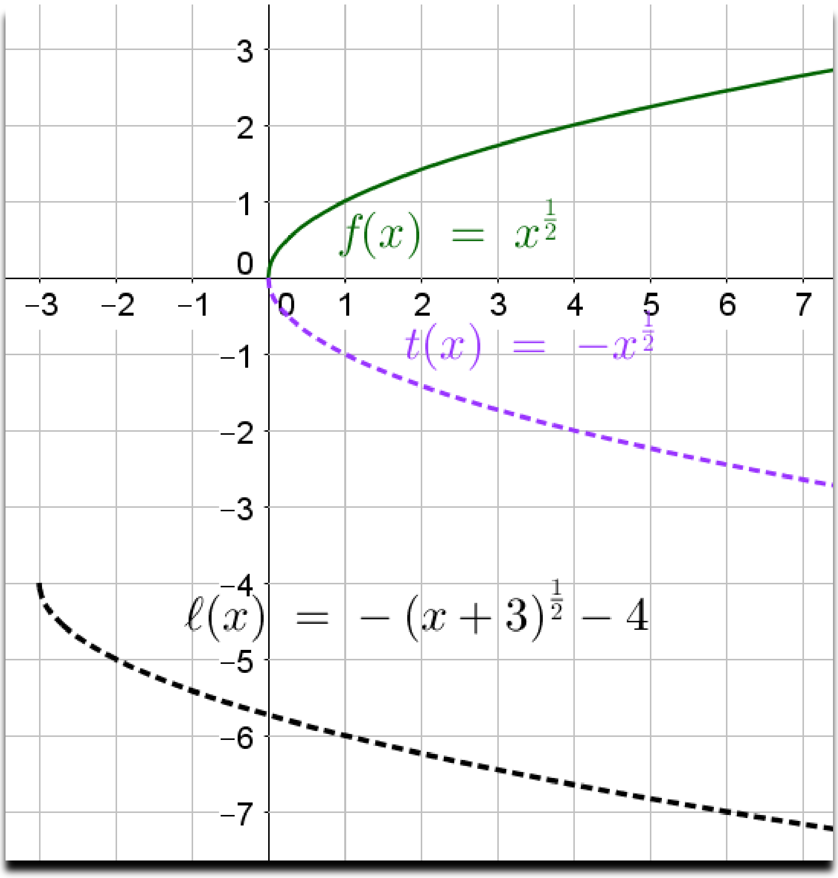
(b) $\text{t}(x) = -\sqrt{x} = -\text{f}(\text{x}) \implies$ **reflexión en el eje "x"** Primero graficamos la curva reflejada en el eje "x".

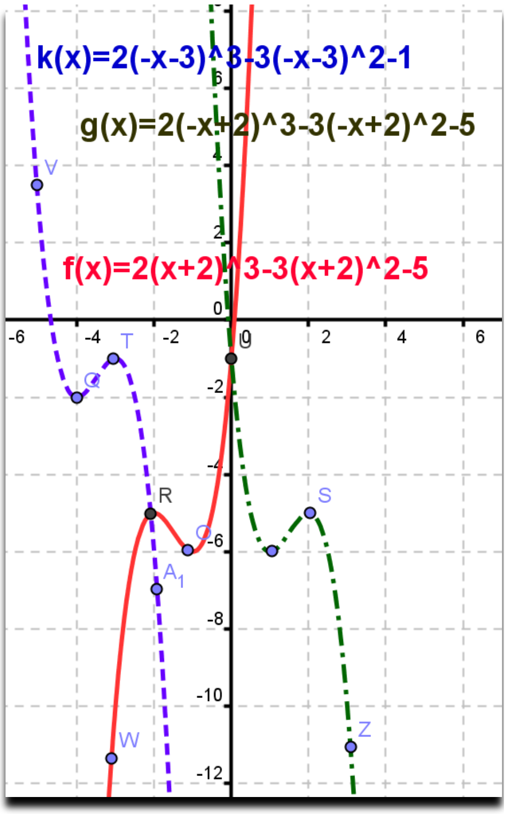


Ya con la curva reflejada en el eje "x", le hacemos los desplazamientos: $\mathrm{l}(x) = -\sqrt{x+3} - 4$

$\mathbf{x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3 \Longrightarrow \longleftarrow 3}$ (Desplazamiento horizontal)

$\downarrow \mathbf{4}$ **(Desplazamiento vertical)**



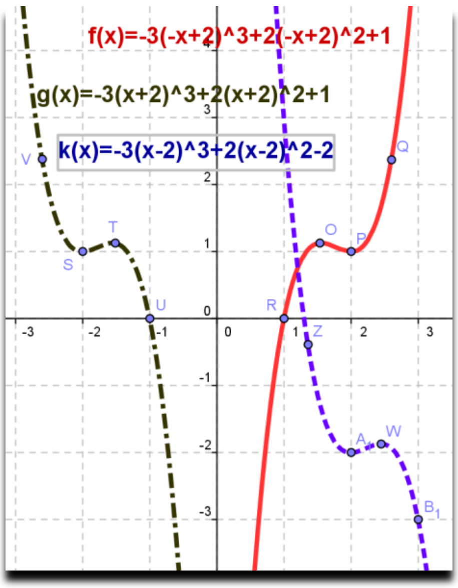


Ejemplo 73. Dada la gráfica $f(x)=2(x+2)^3-3(x+2)^2-5$; grafique $k(x)=2(-x-3)^3-3(-x-3)^2-1$

Solución: En esta grafica hay ***desplazamiento horizontal, vertical y reflexión en "y".***

Grafico la reflejada en "y": $g(x)=2(-x+2)^3-3(-x+2)^2-5$; y luego se le hacen los dos desplazamientos.

Para graficar $k(x)=2(-x-3)^3-3(-x-3)^2-1$; hay que tener en cuenta que $-x+2$ para llegar a $-x-3$ se le tuvo que agregar a $-x+2$, -5 unidades; es decir, cada punto se desplazó 5 unidades hacia la izquierda; y de -5 para llegar a -1 se le sumo 4; es decir la gráfica se desplazó 4 unidades hacia arriba.



Ejemplo 74. Dada la gráfica $f(x)=-3(-x+2)^3+2(-x+2)^2+1$; grafique $k(x)=-3(x-2)^3+2(x-2)^2-2$

Solución: En esta grafica hay ***desplazamiento horizontal, vertical y reflexión en "y".***

Grafico la reflejada en "y": $g(x)=-3(x+2)^3+2(x+2)^2+1$; y luego se le hacen los dos desplazamientos.

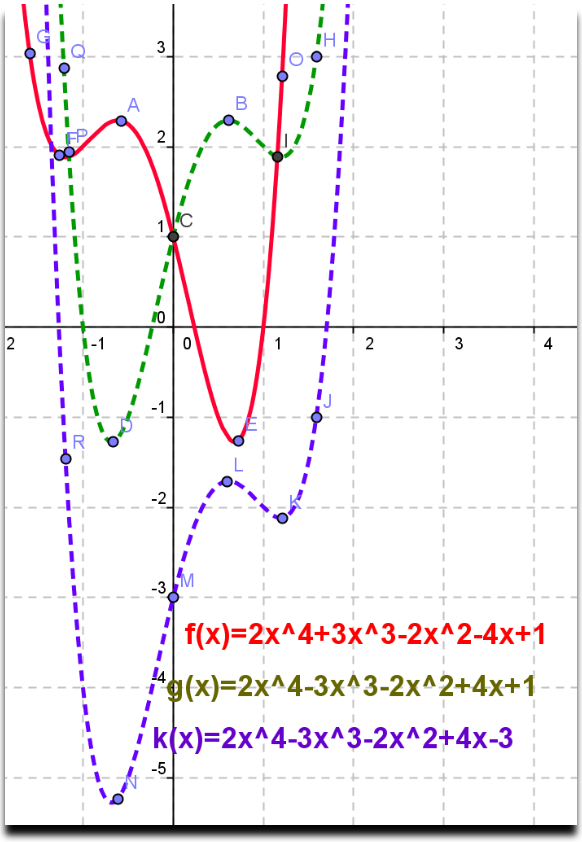
Para graficar $k(x)=-3(x-2)^3+2(x-2)^2-2$; hay que tener en cuenta que $x+2$ para llegar a $x-2$ se le tuvo que agregar a $x+2$, -4 unidades; es decir, cada punto se desplazó 4 unidades hacia la derecha; y de +1 para llegar a -2 se le resto 3; es decir la gráfica se desplazó 3 unidades hacia abajo.

Ejemplo 75. Dada la gráfica $f(x)=2x^4+3x^3-2x^2-4x+1$; grafique $k(x)=2x^4-3x^3-2x^2+4x-3$

Solución: En esta grafica hay ***desplazamiento vertical y reflexión en "y".***

Grafico la reflejada en "y": $g(x)=2x^4-3x^3-2x^2+4x+1$; y luego se hace el desplazamiento en "y".

Para graficar $k(x)=2x^4-3x^3-2x^2+4x-3$; hay que tener en cuenta que de +1 para llegar a -3 se le resto 4; es decir la gráfica se desplazó 4 unidades hacia abajo.

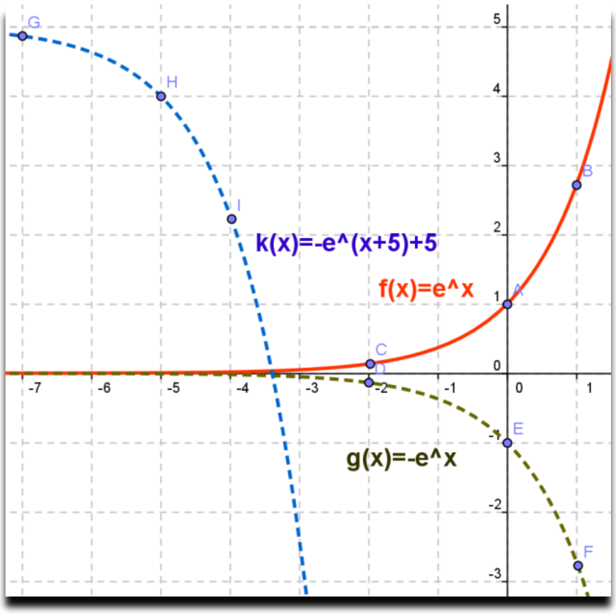


Ejemplo 76. Dada la gráfica $f(x)=e^x$; grafique $k(x)=-e^{(x+5)}+5$

Solución: En esta grafica hay ***desplazamiento horizontal, vertical y reflexión en "x".***

Grafico la reflejada en "x": $g(x)=-e^x$; y luego se hace el desplazamiento horizontal y vertical.

Para graficar $k(x)=-e^{(x+5)}+5$; hay que tener en cuenta que de +x para llegar a x+5 se le sumo 5; es decir la gráfica se desplazó 5 unidades hacia la izquierda. Y de 0 a 5 hubo un desplazamiento de 5 hacia arriba



Ejemplo 77. Dada la gráfica $f(x)=2x^4+3x^3-2x^2-4x+1$; grafique $k(x)=-2(x-5)^4-3(x-5)^3+2(x-5)^2+4(x-5)+1$

Solución: En esta grafica hay ***desplazamiento horizontal, vertical y reflexión en "x".***

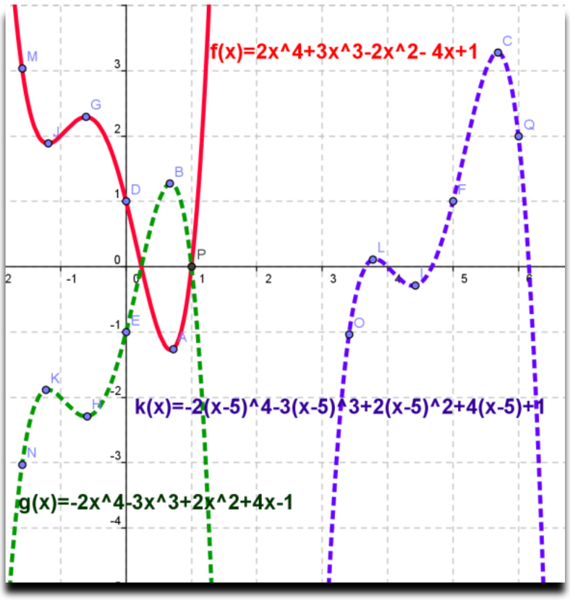
Grafico la reflejada en "x":

$g(x)=-2x^4-3x^3-2x^2+4x-1$ y luego se hacen los dos desplazamientos.

Para graficar

$k(x)=-2(x-5)^4-3(x-5)^3+2(x-5)^2+4(x-5)+1$

Hay que tener en cuenta que de x para llegar a x-5 se le resto 5; es decir la gráfica se desplazó 5 unidades hacia la derecha.



Y de -1 para llegar a +1, hubo un desplazamiento de +2 hacia arriba.

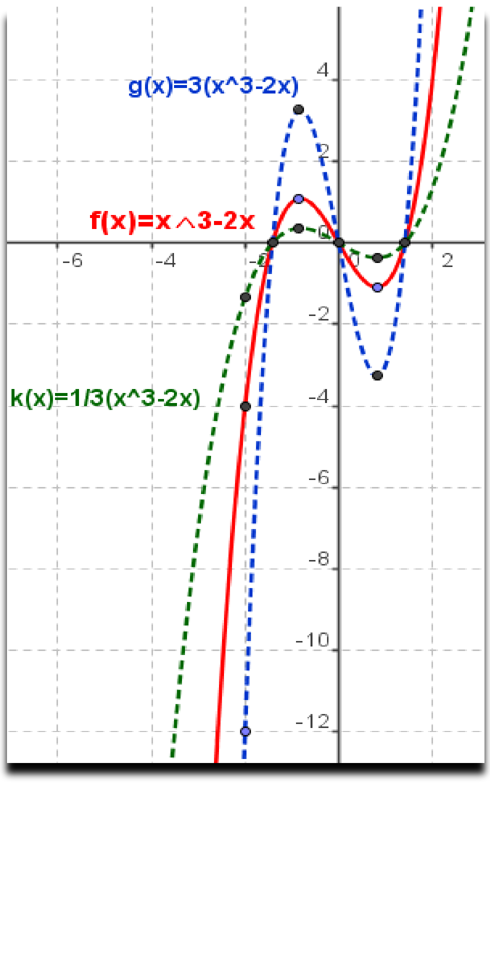
Estiramiento y acortamiento vertical de una gráfica

Si se tiene la gráfica de y=f(x);

a. al obtener y=c.f(x) donde c>1 se tiene un estiramiento vertical de y=f(x); es decir, toda coordenada en "y" de un punto de la gráfica y=f(x) queda multiplicada por "c".
b. al obtener y=c.f(x) donde 0<c<1 se tiene un acortamiento vertical de y=f(x); es decir, toda coordenada en "y" de un punto de la gráfica y=f(x) queda dividida por "c".

Ejemplo 78. A partir de la gráfica $f(x)=x^3-2x$, Grafique $g(x)=3(x^3-2x)$ y $h(x)=1/3(x^3-2x)$

Solución: Obsérvese que la coordenada en "y" de cada punto de la gráfica $f(x)=x^3-2x$ se multiplicó por 3 para obtener la gráfica $g(x)=3(x^3-2x)$; y que la coordenada en "y" de cada punto de la gráfica $f(x)=x^3-2x$ se dividió por 3 para obtener la gráfica $h(x)=1/3(x^3-2x)$



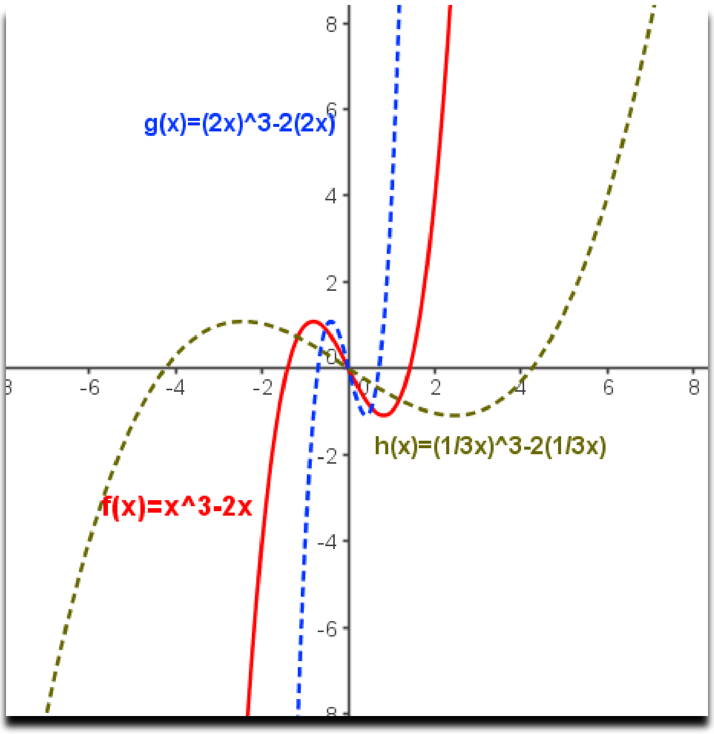
Estiramiento y acortamiento horizontal de una gráfica

Si se tiene la gráfica de y=f(x);

a. al obtener y=f(cx) donde c>1 se tiene un acortamiento horizontal de y=f(x); es decir, toda coordenada en "x" de un punto de la gráfica y=f(x) queda dividida por "c".
b. al obtener y=f(cx) donde 0<c<1 se tiene un estiramiento horizontal de y=f(x); es decir, toda coordenada en "x" de un punto de la gráfica y=f(x) queda multiplicada por "c".

Ejemplo 79. A partir de la gráfica $f(x)=x^3-2x$, Grafique $g(x)=(2x)^3-2(2x)$ y $h(x)=(1/3x)^3-2(1/3x)$

Solución: Obsérvese que la coordenada en "x" de cada punto de la gráfica $f(x)=x^3-2x$ se dividió por 2 para obtener la gráfica $g(x)=(2x)^3-2(2x)$; y que la coordenada en "x" de cada punto de la gráfica $f(x)=x^3-2x$ se multiplicó por 3 para obtener la gráfica $h(x)=(1/3x)^3-2(1/3x)$



2.16.1. LAS CURVAS SENO COSENO DESPLAZADAS

Las curvas seno y coseno $y = a\ sen\ (bx + c) + d \quad y \quad y = a\ cos\ (bx + c) + d \qquad (b \neq 0)$

Tienen: Estiramiento y acortamiento vertical; o amplitud $|a|$, período $\frac{2\pi}{|b|}$; desplazamiento de fase $bx + c = 0\ \Rightarrow x = \frac{-c}{b}$; y desplazamiento vertical "d"

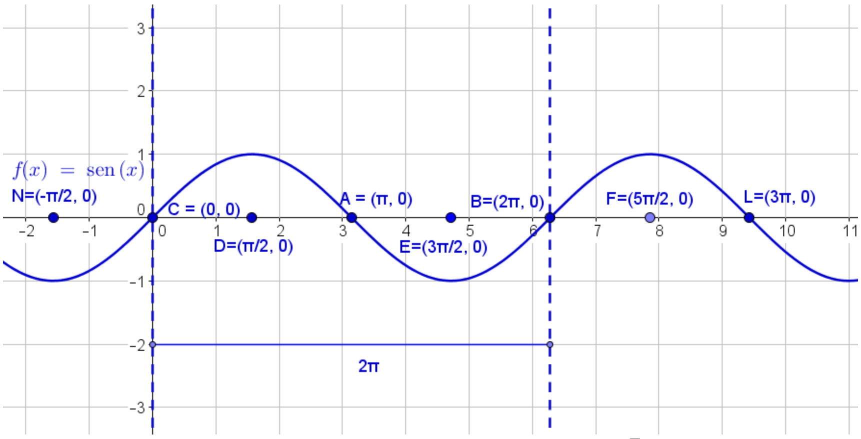
Un intervalo adecuado para graficar un período completo si b>0 es $\left[-\frac{c}{b}, \frac{2\pi - c}{b}\right]$

Ejemplo 1. Determine la amplitud, período y desplazamiento de la fase de $f(t) = -3\,sen\left(\frac{1}{2}t + \pi/4\right)$ y grafique un período completo.

Solución:

Amplitud: $|a| = |-3| = 3$

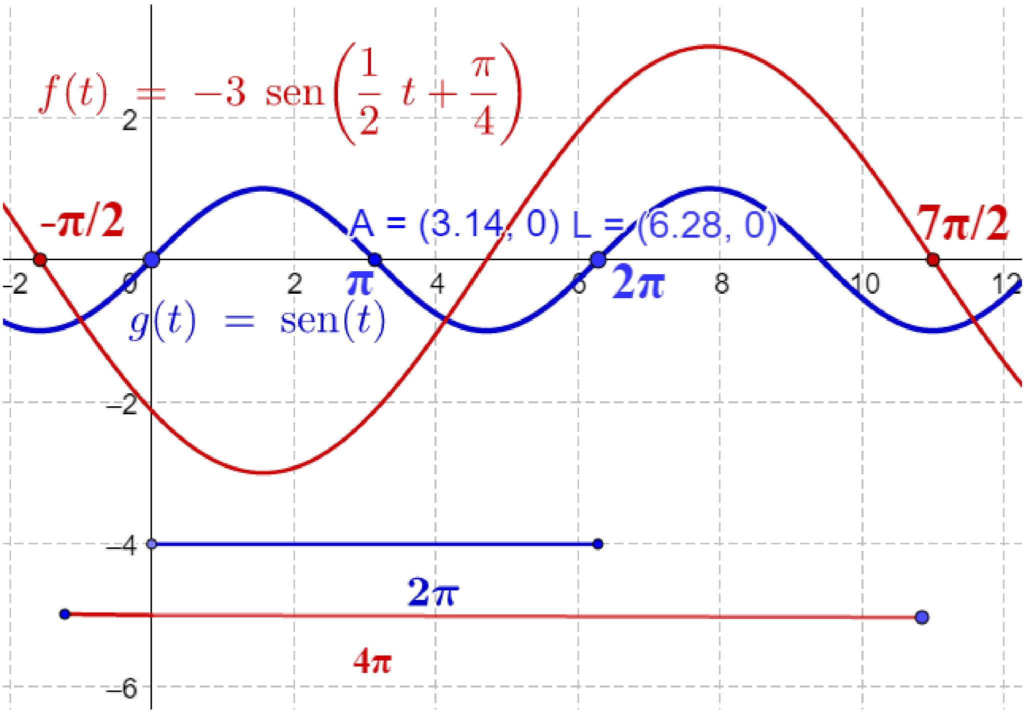
Período: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$



desplazamiento de fase: $\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow t = \frac{-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{2}$

período completo: $\left[-\frac{c}{b}, \frac{2\pi - c}{b}\right] = \left[-\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}}, \frac{2\pi - \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}}\right] =$

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\frac{7\pi}{4}}{1/2}\right] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$



Ejemplo 2. Determine la amplitud, período y desplazamiento de la fase de $f(t) = 4\,sen(2t - \pi)$ y grafique un período completo.

Solución:

Amplitud: $|a| = |4| = 4$

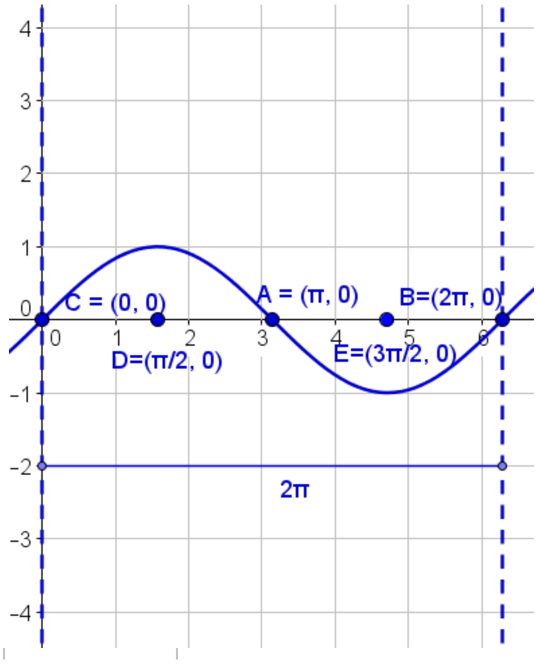
Período: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

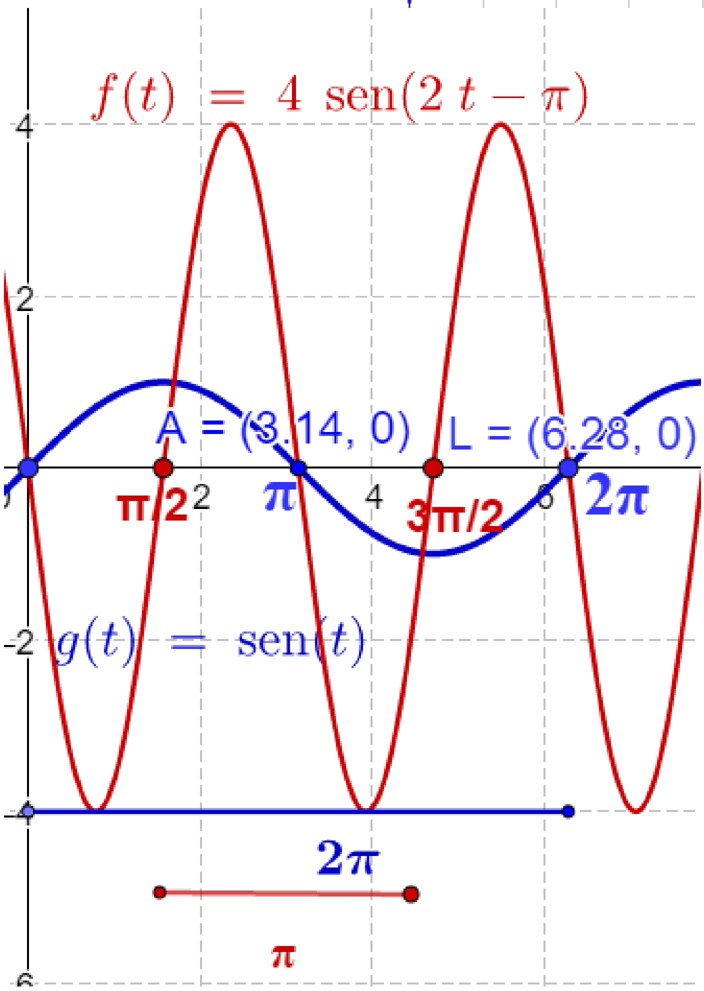
desplazamiento de fase: $2t - \pi = 0$

$$\Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

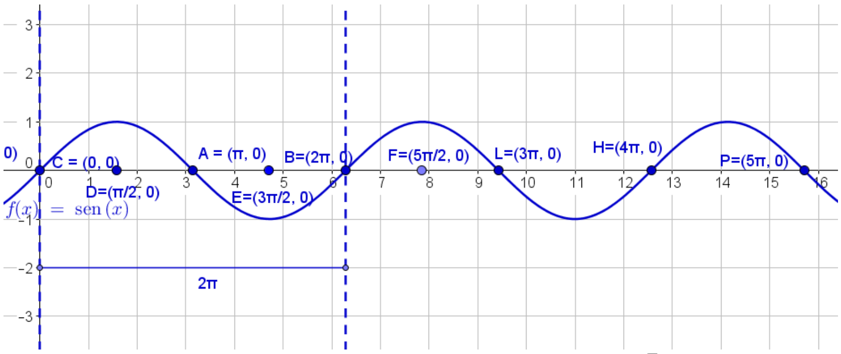
período completo: $\left[-\frac{c}{b}, \frac{2\pi - c}{b}\right] =$

$$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi + \pi}{2}\right] = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$





Ejemplo 3. Determine la amplitud, período y desplazamiento de la fase de $f(t) = 3sen\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{2}\right)$ y grafique un período completo.

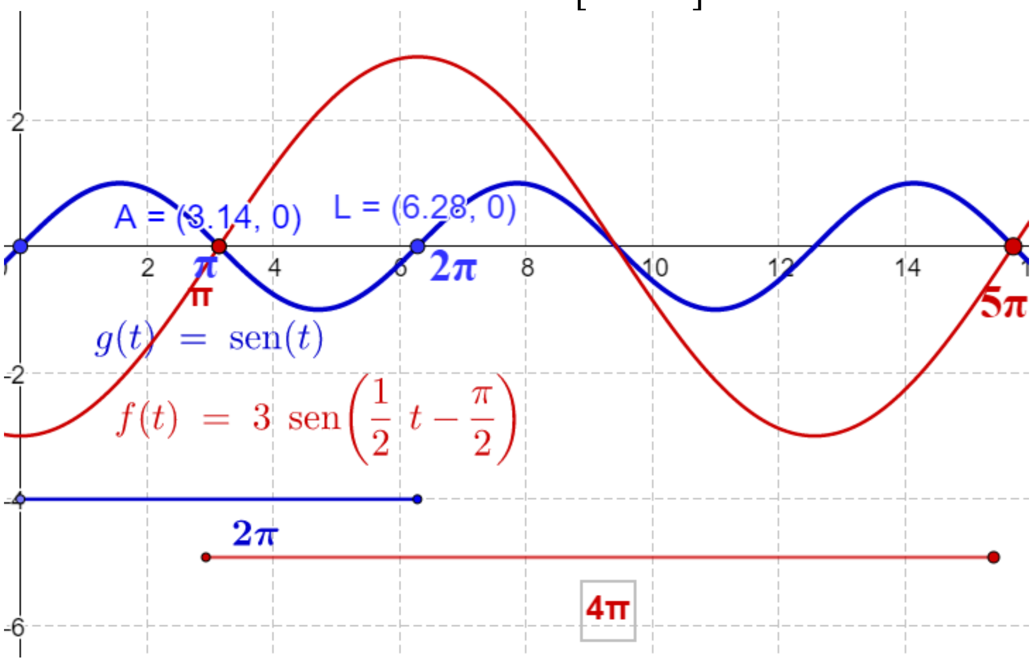


Solución:
Amplitud: $|a| = |3| = 3$
Período: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$

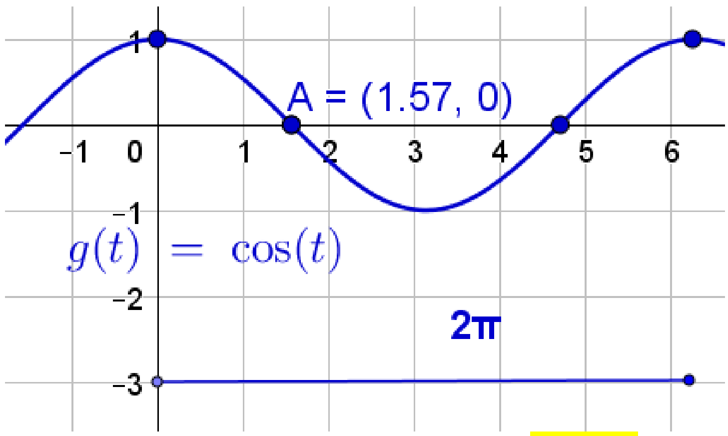
desplazamiento de fase: $\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow t = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}} = \pi$

período completo: $\left[-\frac{c}{b}, \frac{2\pi - c}{b}\right] = \left[\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{2\pi + \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}}\right] =$

$\left[\pi, \frac{\frac{5\pi}{2}}{1/2}\right] = [\pi,\ 5\pi]$



Ejemplo 4. Determine la amplitud, período y desplazamiento de la fase de $f(t) = -\frac{1}{2}cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$ y grafique un período completo.



Solución:
Amplitud: $|a| = 1/2$
Período: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

desplazamiento de fase: $2t - \pi/3 = 0 \Rightarrow t = \pi/6$

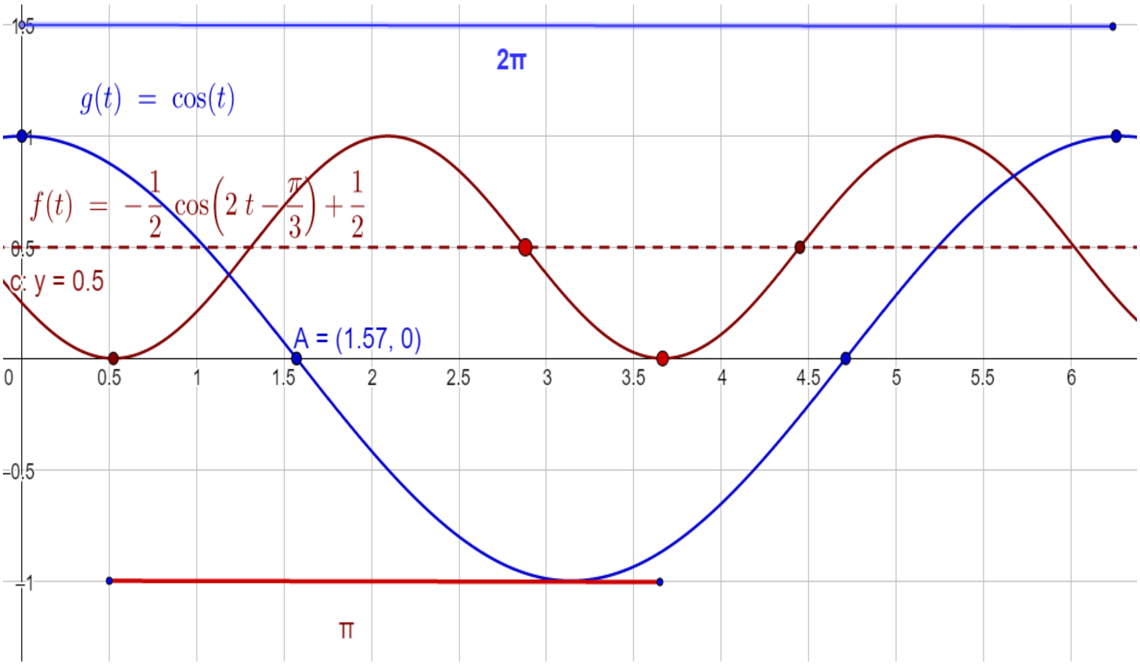
Desplazamiento hacia arriba de 1/2

período completo: $\left[-\frac{c}{b},\frac{2\pi-c}{b}\right]=\left[-\frac{-\frac{\pi}{3}}{2},\frac{2\pi-(-\frac{\pi}{3})}{2}\right]=$

$[\pi/6, 7\pi/6]$

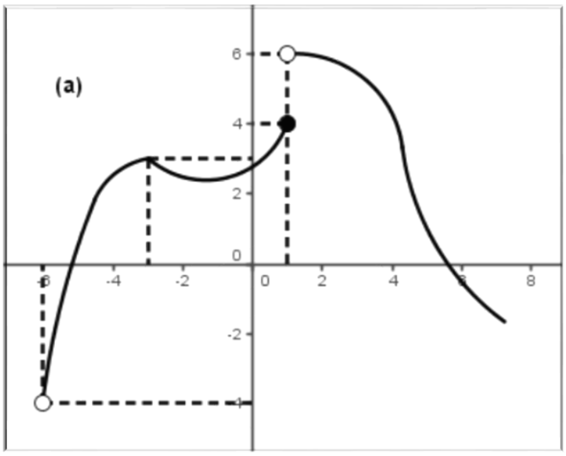
$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{x}\in[\pi/6,7\pi/6\,]$

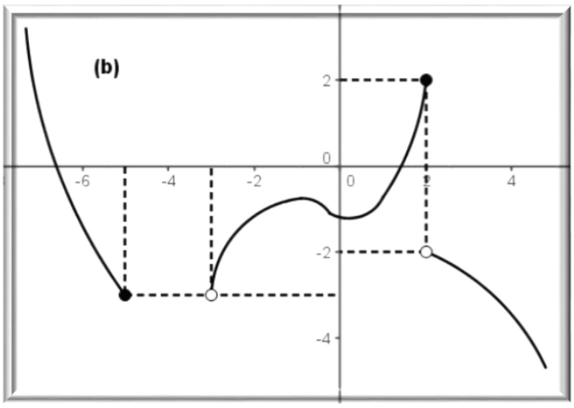
$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{y}\in[\mathbf{0},\mathbf{1}]$

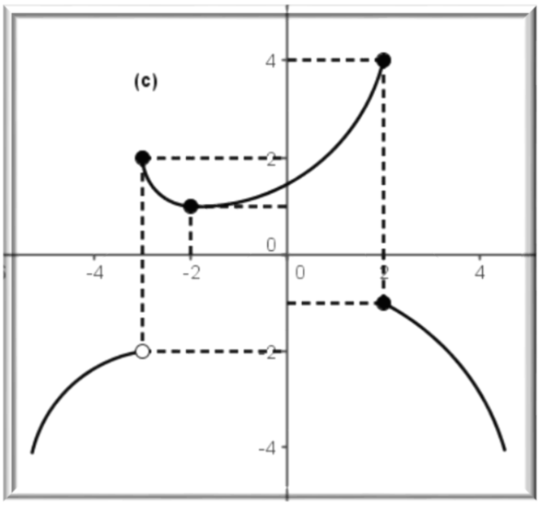


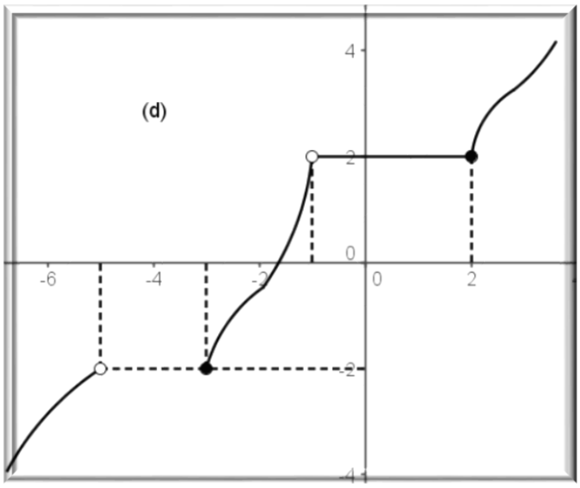
2.17. EJERCICIOS PROPUESTOS

Dada la siguientes gráficas, indique el dominio y el rango; ¿será relación?, o función, si es función, que tipo.









Solución: (a) D=xЄ(-6, ∞); R=yЄ(-∞, 6); Función "simple"

(b) D=xЄ(-∞, -5] U (-3, ∞); R=yЄ(-∞,∞); Función sobreyectiva

(c) D=xЄ(-∞,∞);R=yЄ (-∞, -1] U [1, 4]; Relación

(d) D=xЄ(-∞,-5) U [-3, -1) U (-1, ∞); R=yЄ(-∞,∞); Función sobreyectiva

Encuentre el dominio de la función dada.

1. $f(x) = 6 - 4x, \ -2 \leq x \leq 3$. **R/** $[-2, 3]$

2. $g(x) = \dfrac{2}{3x-5}$ $\quad R/ \{x / x \neq 5/3\} = (-\infty, 5/3) \cup (5/3, \infty)$

3. $h(x) = \sqrt{2x-5}$ $\quad$ R/ $\left[\frac{5}{2}, \infty\right)$

4. $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\quad$ R/ $[-1, 1]$

Encuentre el dominio de la función dada.

5. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$.   R/ $\{x / x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

6. g(x) = $\sqrt[4]{x^2 - 6x}$ R/ $\{x / x \leq 0\_o\_bien\_x \geq 6 = (-\infty, 0\ ] \cup [\ 6, \infty)\}$

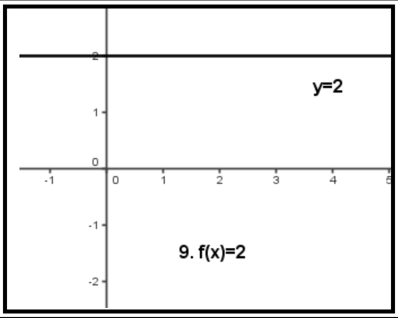
7. $\varnothing(x) = \sqrt{\dfrac{x}{\pi - x}}$ R/ $[0, \pi)$ **8**. f(t) = $\sqrt[3]{t-1}$ R/ $(-\infty, \infty)$

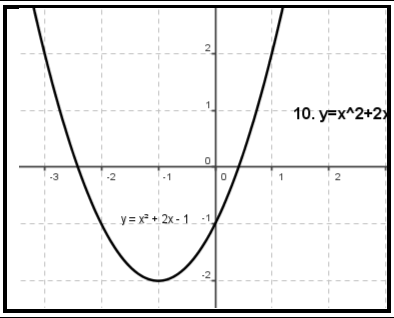
9. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^2-9}{\sqrt[6]{x^2-4}}}$

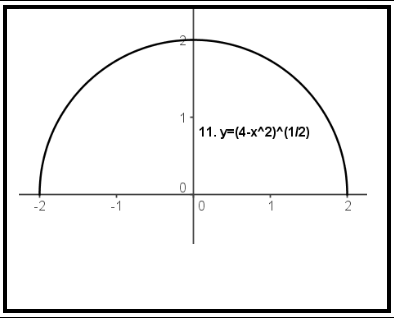
Determine el dominio y trace la gráfica de la función dada, y diga qué tipo de función es.

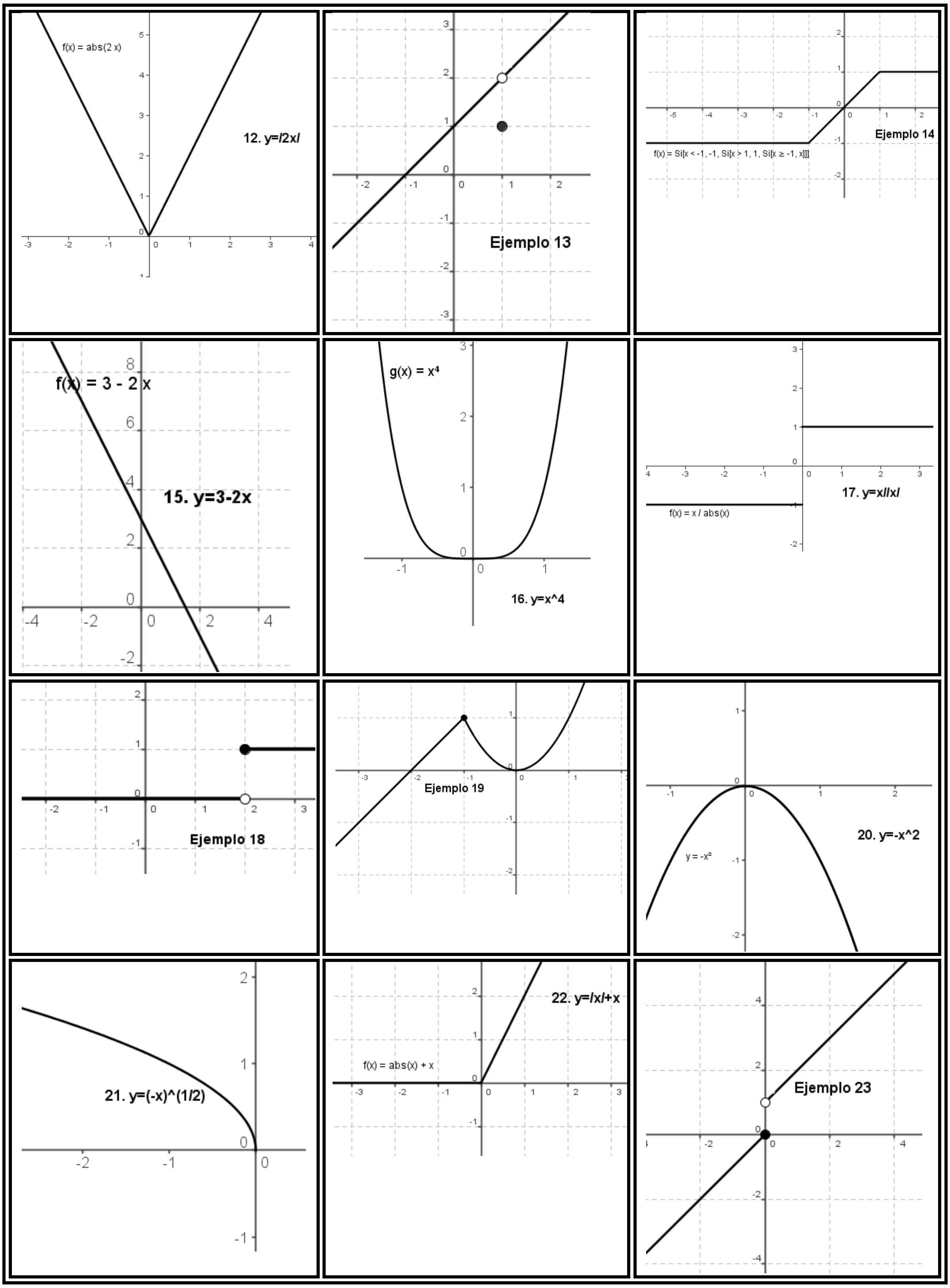
9. $f(x) = 2$ **10.** $f(x) = x^2 + 2x - 1$ **11.** h(x) = $\sqrt{4 - x^2}$ **12.** H(x) = $\lvert 2x \rvert$ **13.** $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x \neq 1 \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **14.** $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < -1 \\ x, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$	**15.** $f(x) = 3 - 2x$ **16.** g(x) = x^4 **17.** $f(x) = x / \lvert x \rvert$ **18.** $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2 \\ 1, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **19.** $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{si } x \leq -1 \\ x^2, & \text{si } x > -1 \end{cases}$ **20.** $f(x) = -x^2$	**21.** g(x) = $\sqrt{-x}$ **22.** G(x) = $\lvert x \rvert + x$ **23.** $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **24.** $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \leq -1 \\ 3x + 2, & \text{si } \lvert x \rvert < 1 \\ 7 - 2x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

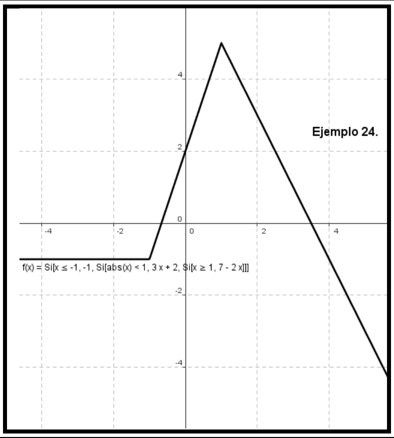
Respuestas:








f(x) = abs(2 x)
12. y=/2x/
Ejemplo 13
Ejemplo 14
f(x) = Si[x < -1, -1, Si[x > 1, 1, Si[x ≥ -1, x]]]
f(x) = 3 - 2 x
15. y=3-2x
$g(x) = x^4$
16. y=x^4
17. y=x/x/
f(x) = x / abs(x)
Ejemplo 18
Ejemplo 19
20. y=-x^2
$y = -x^2$
21. y=(-x)^(1/2)
22. y=/x/+x
f(x) = abs(x) + x
Ejemplo 23



En cada uno de los ejercicios siguientes obtenga una fórmula para la función descrita y determine su dominio.

25. Un rectángulo tiene 20 m de perímetro. Exprese el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados. R/ A (L)=10L –L².; 0<L<10

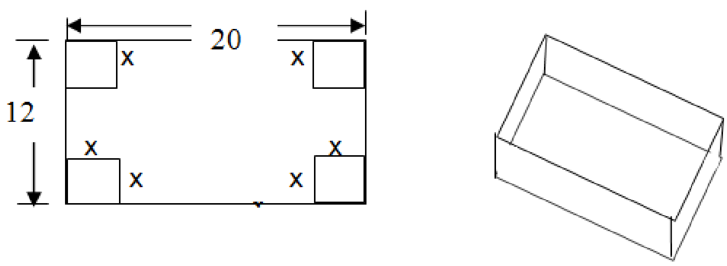
26. Exprese el área de un triángulo equilátero en función de la longitud de uno de los lados.

R/ A(x)= $\sqrt{3}x^2 / 4, \quad x > 0$

27. Una caja rectangular abierta con volumen de 2 m^3 tiene base cuadrada. Exprese el área de la superficie de la caja en función de la longitud de uno de los lados de la base. R/ S (x) = x²+(8/x). x>0

28. Con una hoja rectangular de cartón cuyas dimensiones son 12 pulg por 20 pulg, se van a construir una caja abierta recortando cuadrados iguales de lado ***x*** en cada una de las esquinas y luego doblando los bordes hacia arriba, como se ilustra en la figura. Exprese el volumen ***V*** de la caja en función de ***x***.

R/ V (x) = $4X^3 - 64x^2 + 240x$. 0<x<6



29. Halle el dominio, grafique y halle el rango; ¿tipo de función?:

$$a.\quad f(x)=\begin{cases}\sqrt{25-x^2}, & si \quad -5<x\leq 4\\ x+10, & si \quad x<-5\\ 6, & si \quad 4<x<6\\ 2, & si \quad x=6\\ x-10, & si \quad x>6\end{cases}$$

$$b.\ g(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-36}, & si\ \ x<-6\ \ U\ \ x\geq 6\\ \sqrt{9-x^2}, & si\ -2\leq x<3\\ 4, & si\ \ 3<x<6\\ 5, & si\ \ \ x=3\\ \frac{1}{2}x^2-4, & si\ \ -4<x<-2\\ x+4, & si\ \ -6\leq x\leq -4\end{cases}$$

$c.\quad h(x)=|x+5|$

$d.\quad k(x)=|x-3|+5$

$e.\quad m(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-1}+3x+2; \quad si \quad -5<x<-2\cup 2\leq x\leq 5$

https://www.youtube.com/watch?time_continue=2&v=ya9n5FzJhlU

https://www.youtube.com/watch?v=TztS2y2GU5c

https://www.youtube.com/watch?v=_D1pVYLLgF0

https://www.youtube.com/watch?v=AU1GVkYD78w

30. Una empresa compró maquinaria nueva por $50.000.000, se deprecia linealmente cada año un 10% de su costo original.

a) Expresar el valor de la maquinaria en función de su antigüedad

b) Calcular el valor de la maquinaria después de 4 años

c) Bosqueje la gráfica del costo de la maquinaria en función del tiempo.

d) Cuando la maquinaria se deprecia totalmente.

31. El costo de fabricar 10 bolsas de cartón al día es de $2400, mientras que fabricar 15 bolsas del mismo tipo al día cuesta $3000. Suponiendo que se trata de un modelo de costo lineal

a) Expresar el costo de fabricar x bolsas de cartón diariamente, en función del número de bolsas.

b) Halle el costo de fabricar 82 bolsas de cartón al día.

32. La temperatura medida en grados Farenheit (°F) tiene un cambio constante en relación con la temperatura medida en grados Celsius (°C). Si se sabe que 0°C son equivalentes a 32 °F y 100 °C son equivalentes a 212 °F

a) Hallar un modelo matemático que describa la relación entre °F y °C.

b) Convertir -15 °C a °F

c) Convertir 68 °F a °C

33. Un tanque contiene 50 litros de agua. A las 8:00 a.m. se abre una llave para llenarlo de tal forma que a la 1:00 p.m. hay en el tanque 1.250 litros de agua. Si se considera que la cantidad de agua que entra al tanque es constante y que la capacidad del tanque es de 2.000 litros,

a) ¿Cuántos litros de agua entran al tanque cada hora?

b) Hallar el modelo matemático que represente la situación

A partir del modelo matemático del numeral b., responder lo siguiente:

c) ¿A qué horas hay en el tanque 1.875 litros de agua?

d) ¿Cuánta agua habrá en el tanque a las 11:30 a.m.?

e) ¿Cuándo quedará lleno el tanque?

34. Entre 1980 y 2008, un coleccionista de libros raros compra libros para su colección a una tasa constante por año si en 1980 tenía 420 libros en 2000 tenía 1220 libros. Determinar

a) Una función que relacione el número de libros por año.

b) Calcule la cantidad de libros que tenía el coleccionista en 1993

c) En qué año tiene el coleccionista 1380 libros

35. Un tractor cuesta $120.000 y cada año se devalúa 8% de su precio original.

a) Encuentre una fórmula para el valor V de la maquina después de t años.

b) Determine el valor del tractor a los 5 años de realizada la compra.

c) ¿Cuándo se devalúa totalmente?

36. Una empresa de alquiler de lavadoras cobra $2.500 por llevar y recoger la máquina, más $1.300 por hora.

a) Escriba la fórmula del costo total de la renta para t horas.

b) Si usted dispone de $7.000, por cuánto tiempo puede arrendar la lavadora.

c) ¿Cuánto dinero pago por 5 horas?

37. La producción de café en el municipio de Andes creció linealmente durante los años 1980 a 1991. En el año 1982 fue de 200.000 cargas y en 1987 de 370.000.

a) Escriba una ecuación que represente la producción de café durante el periodo en mención.

b) Indique cuál fue la producción en los años 1980 y 1991.

38. El ingeniero de una planta de fabricación de sillas encontró que a la planta le cuesta 22 millones de pesos fabricar 110 sillas en un día y 48 millones de pesos fabricar 300 sillas diariamente. Exprese el costo de producción C como función del número x de sillas producidas (Suponga que la relación es lineal). Indique la pendiente de la función y explique qué significa. Cuál es el intercepto con el eje vertical y qué significado tiene en el contexto dado.

https://www.youtube.com/watch?v=wk2L_QZOThw

https://www.youtube.com/watch?v=ZiElzVbANBo

39. La tasa de inflación, anual, en México durante el periodo comprendido entre 2001 a 2009, está dada por la función: $I(t) = 3t^2 - 14t + 19$

Donde, t representa el número de años desde 2001.

a) ¿En qué año la tasa de inflación será mínima?

b) ¿Cuál es la tasa mínima de inflación?

c) ¿Cuál es la tasa de inflación en 2005?

d) ¿Cuándo la tasa de inflación será de 10?

40. Un delfín toma impulso y salta por encima de la superficie del mar siguiendo la ecuación $\mathrm{y} = -\mathbf{t^2} + \mathbf{6t} + \mathbf{12}$, donde y es la altura que alcanza cuando salta medida desde el nivel del mar (en metros) y t el tiempo empleado en segundos.

a) ¿Cuánto tiempo tarda el delfín en alcanzar la atura máxima, sobre el nivel del mar?

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el delfín sobre el nivel del mar?

c) ¿Cuánto tiempo permanece el delfín en el aire?

41. Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 metros por segundo. La distancia s, en metros, del objeto al suelo después de t segundos, está dada por la ecuación $\mathrm{s(t)} = -4.9\mathrm{t}^2 + 20\mathrm{t}$ ¿Cuál es la altura máxima y cuándo la alcanza?

42. Durante el festival de cine de Cartagena la asistencia, en un día cualquiera, a las funciones, en cierto teatro, estuvo representada por el modelo $A(t) = -2\,t^2 + 16\,t + 50$, donde $A(t)$ representa el número de personas asistentes al teatro y t el tiempo trascurrido (en horas), a partir de las 11:00 a.m., hora en que abrió el teatro. De acuerdo a esta información, determinar

¿Cuántas personas había en el teatro a las 11:00 a.m?

¿Cuál fue la asistencia máxima al teatro en ese día?

¿A qué hora se presentó la máxima asistencia?

https://www.youtube.com/watch?v=DhZ-hfpkkpo

43. La efectividad de un comercial de televisión depende de cuántas veces lo vea un televidente. Después de algunos experimentos una agencia de publicidad encuentra que si la efectividad E se mide en una escala de uno a diez, entonces, $E(n) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{90}n^2$, donde n es el número de veces que un televidente ve un determinado comercial. a) Para que un comercial tenga efectividad máxima, ¿cuántas veces lo debe ver un televidente? R/30 veces. b) ¿después de cuantas veces de ver el comercial, no tiene nada de efectividad para el televidente? R/60 veces. c) ¿Cuántas veces tiene que ver el televidente el comercial para que la efectividad sea de 5?

44. Juan tiene una venta de obleas en el Parque de Bolívar, realizando un estudio sobre el comportamiento de sus ganancias con la cantidad de obleas vendidas, se dio cuenta que sus ganancias seguían el siguiente modelo: $G(x) = -\frac{x^2}{2} + 60x - 600$

Donde x representa el número de obleas vendidas y $G(x)$ las ganancias, de acuerdo con la información indique:

a) ¿Cuál es la ganancia máxima que Juan puede obtener?

b) ¿Cuántas obleas debe vender para tener la ganancia máxima?

c) ¿Cuántas obleas debe vender para librar la inversión y no tener pérdidas?

45. Simón vende confites en la universidad, realizando un estudio sobre el comportamiento de sus ganancias, se dio cuenta que sus ganancias seguían el siguiente modelo:

$$G(x) = -\frac{x^2}{4} + 16x - 60$$

Donde x representa la cantidad de confites vendidos y $G(x)$ las ganancias, de acuerdo con la información indique:

a) ¿Cuál es la ganancia máxima que Simón puede obtener?

b) ¿Cuántas confites debe vender para tener la ganancia máxima?

c) ¿Cuántos confites debe vender para librar la inversión y no tener pérdidas?

46. Un modelo para determinar el número $N(t)$ de personas del ITM que han escuchado cierto rumor t días después es $N(t) = 5\,(1 + e^{rt})$, si a los 3 días el rumor lo conocen 150 personas, determinar

a) ¿Cuántas personas han escuchado el rumor 10 días después?

b) ¿Cuál es el tiempo necesario para que el rumor lo conozcan 15000 personas?

c) ¿Cuántas personas comenzaron el rumor?

d) Si el I.T.M. tiene 27000 estudiantes, ¿Cuándo conocieron todos el rumor?

https://www.youtube.com/watch?v=paRLzM87f9c

47. Un lago contiene cierta especie de pez. La población de peces t años después de colocarlos en el lago se modela mediante la función $P(t) = \frac{10}{1-4\,e^{k\,t}}$, 3 años después se contaron 20 peces, determinar

a) ¿Cuántos peces hay en lago 8 años después?

b) ¿Cuántos peces hay en lago 7 años después?

c) ¿Cuántos peces hay en lago 6 años después?

d) ¿Cuándo se estabiliza el número de peces en lago?, y ¿cuánto es ese número de peces?

48. El número $\boldsymbol{N}$ de bacterias en un cultivo crece de tal forma que matemáticamente su modelo es: $N(t) = 100 + e^{2t}$ .Determine el número de bacterias depositadas inicialmente, justo antes de que comenzaran a reproducirse. ¿Cuántas horas deberán transcurrir para que el número de bacterias sea de 1500?

49. Se puede demostrar que la velocidad **V** de descenso de un paracaidista en un tiempo **t** después del lanzamiento se puede calcular como: $V(t) = 80\,(\,1 - \,e^{-\,0.2\,t})$ Donde t está dada en segundos y la velocidad en pies/seg.

a) ¿A los 10 segundos del lanzamiento qué velocidad lleva el paracaidista?

b) ¿En qué momento tiene una velocidad aproximada de 26.37 pies/seg?

50. Con los datos del censo de Colombia del siglo XX, la población de Bogotá puede modelarse mediante

$$P(t) = \frac{19.875}{1 + 57.993e^{-0.035005t}}$$

Donde P es la población en millones y t es el número de años desde 1800. Con base es este modelo:

a) ¿Cuál será la población en 2010?

b) ¿En qué año la población será de 15 millones?

51. A medida que un obrero adquiere más experiencia en su trabajo, la producción diaria aumenta hasta alcanzar una máxima. Supóngase que el n-ésimo día de trabajo, el número $f(n)$ de artículos producidos se calcula mediante el modelo $f(n) = 3 + 20\,(1 - e^{-0.1n})$

a) ¿Cuál es el número de artículos producidos el día quinto?

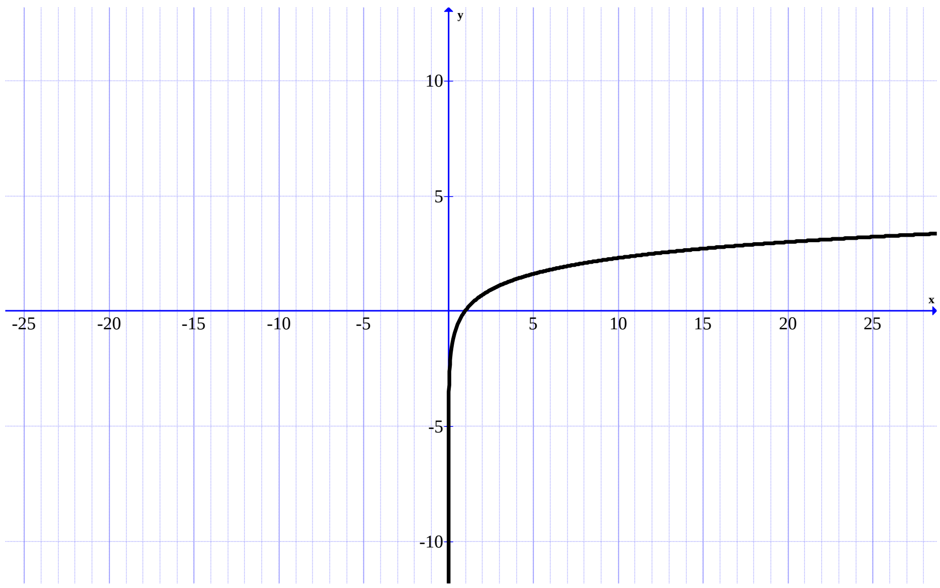
b) ¿A los cuántos días produce el obrero 22 artículos?

52. En un laboratorio de Biotecnología se tiene un cultivo de bacterias en un fermentador durante 4 horas. La población de bacterias crece rápidamente con el paso del tiempo. La función que relaciona la cantidad de bacterias y el tiempo t transcurrido en horas **C(t) =** $\mathbf{25\ e^{t}}$

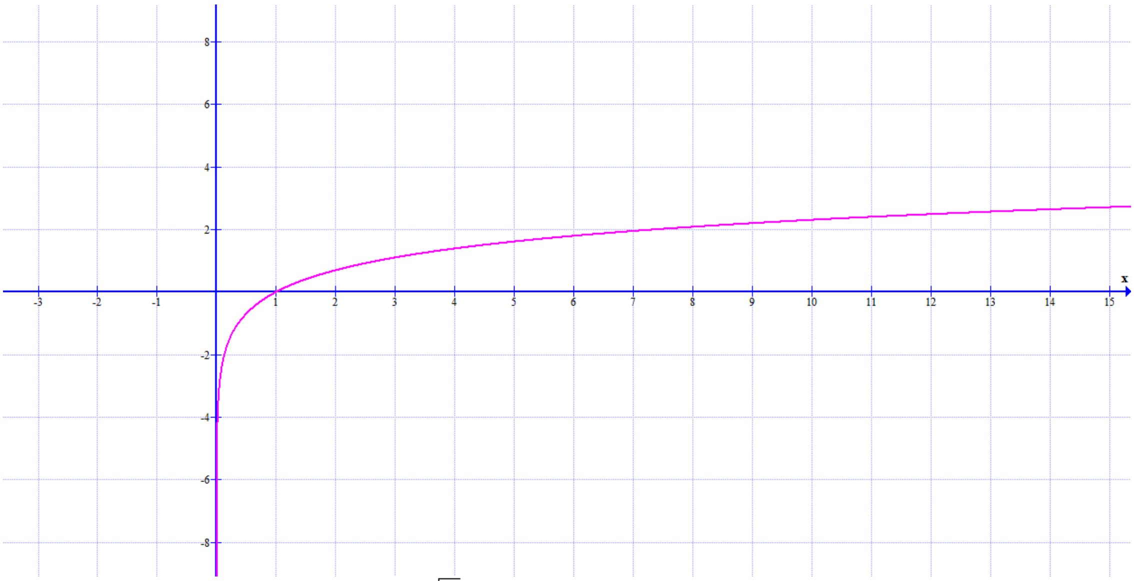
a) Determine en cuanto se incrementa la población en 3 horas

b) ¿Cuándo habrá una población de 1000 bacterias?

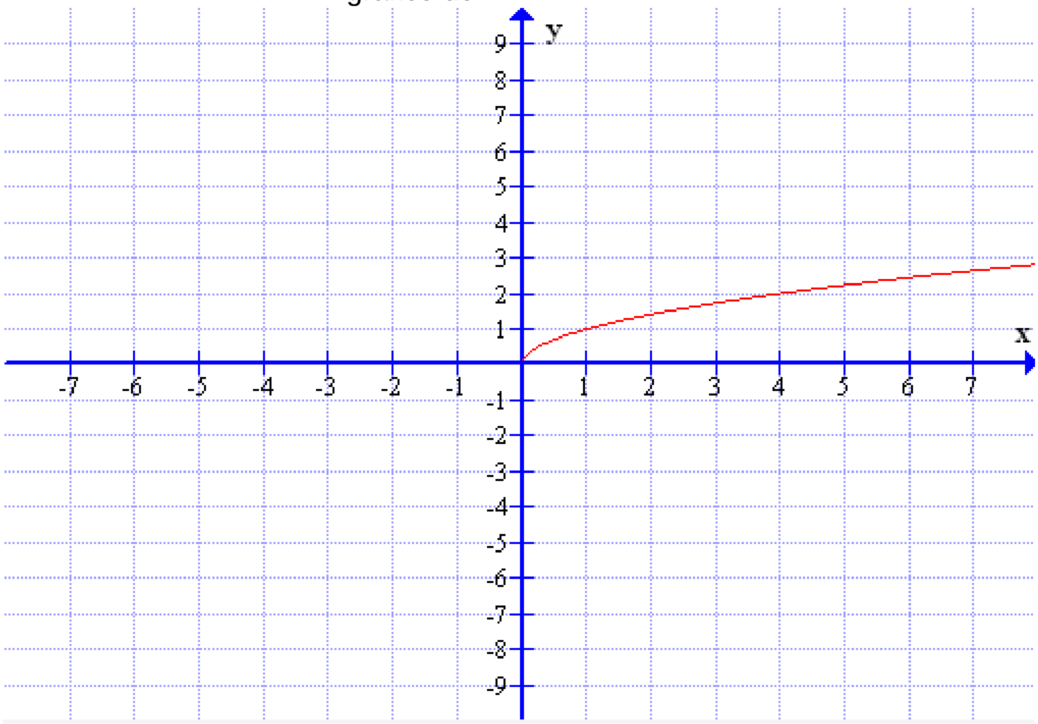
53. Utilizar la gráfica de $y = \ln x$ dada a continuación, para realizar la gráfica de $y = 5 + \ln(x + 10)$ Mediante transformaciones de funciones, en el mismo plano.



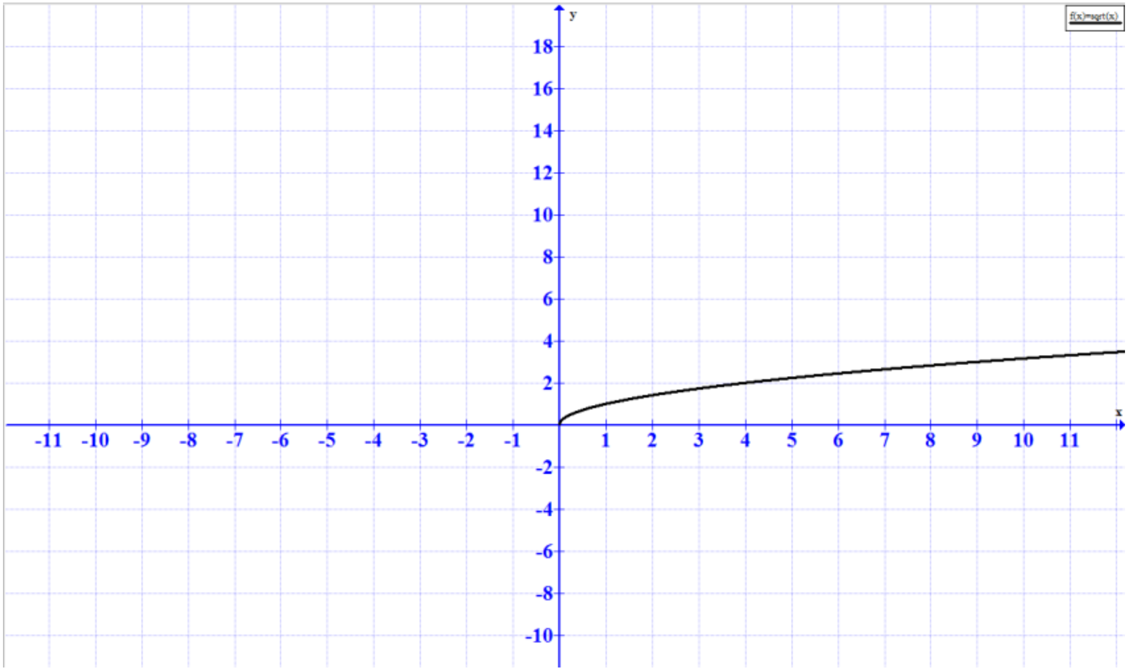
54. Utilizar la gráfica de $y = \ln x$ dada a continuación, para realizar la grafica de $y = -\ln x + 1$, mediante transformaciones de funciones, en el mismo plano.



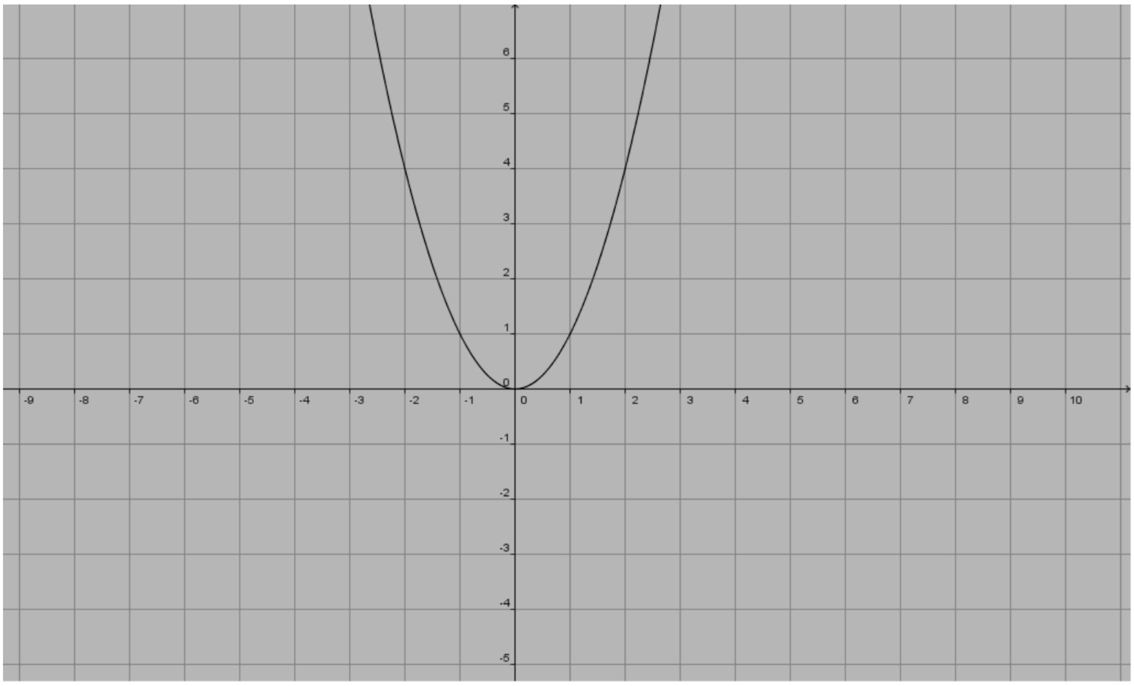
55. Utilizar la gráfica de $y=\sqrt{x}$ y las transformaciones de funciones para realizar el gráfico de $y=\sqrt{x+3}-1$



56. Utilizar la gráfica de $y=\sqrt{x}$ dada a continuación, para realizar la grafica de $y=\sqrt{3-x}+2$, mediante transformaciones de funciones, en el mismo plano.

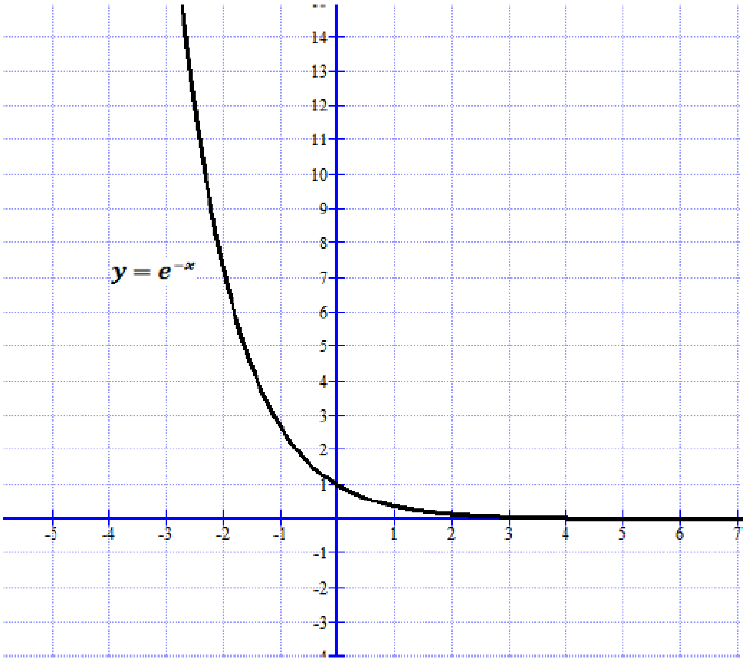


57. Explique los tipos de transformaciones que deben realizarse a partir de la función $y = x^2$ para obtener la función $y = 5 - (x + 3)^2$. **Bosqueje** esta última.



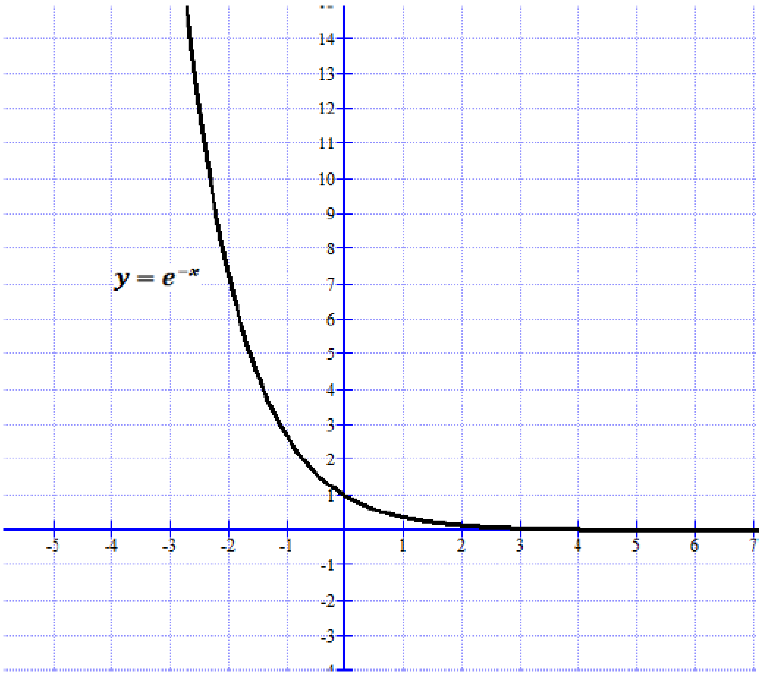
58.

IV. Utilizar la grafica de $y = e^{-x}$ dada a continuación, para realizar la grafica de $y = e^{-x-2} - 3$ mediante transformaciones de funciones, en el mismo plano.



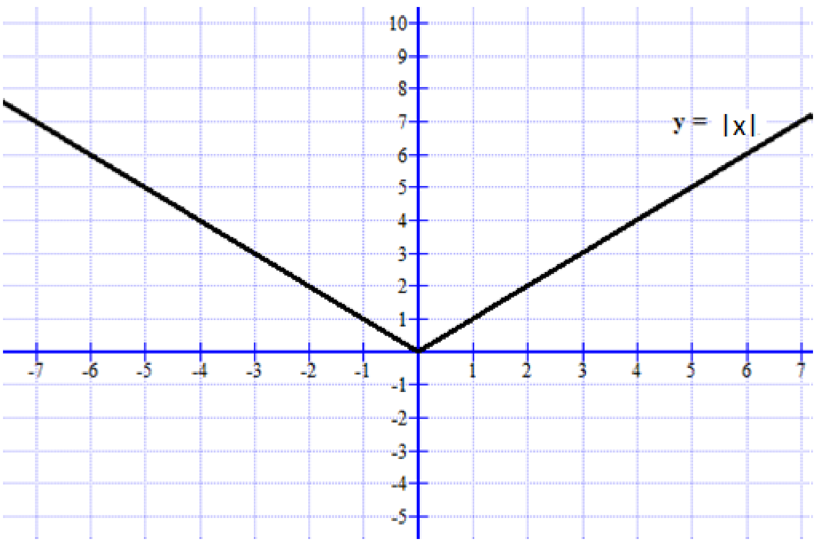
59.

IV. Utilizar la grafica de $y = e^{-x}$ dada a continuación, para realizar la grafica de $y = e^{x-2} - 1$ mediante transformaciones de funciones, en el mismo plano.

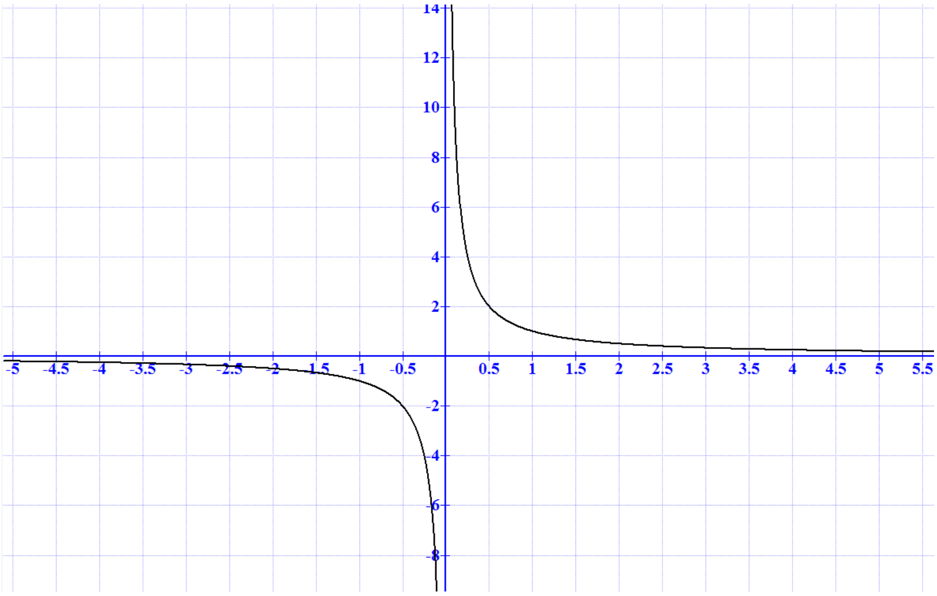


60. Utilizar la gráfica de $y = e^x$ dada a continuación, para realizar la gráfica de $y = 5{-}e^{x+5}$ mediante transformaciones de funciones, en el mismo plano.

61. Utilizar la gráfica de $y = |x|$ dada a continuación, para realizar la grafica de $y = |x-3| + 2$, mediante transformaciones de funciones, en el mismo plano.



62. Utilizar la gráfica de $y = 1/x$ dada a continuación, para realizar la gráfica de $y = \frac{1}{x-2} + 3$ mediante transformaciones de funciones, en el mismo plano.



63. Dadas las siguientes funciones, halle $fog(x),\ gof(x),\ fof(x),\ \ gog(x); y\ simplifique$

a. $f(x) = \frac{x-1}{x+2}, \quad g(x) = \frac{5-x}{x+3}$

b. $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = (x+1)^2 - 4$

c. $f(x) = (x+1)^3$ y $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2$

d. $f(x) = \sqrt{1-x}$ y $g(x) = \frac{1}{x^2} + 2$

e. $f(x) = \sqrt[3]{2+x}$ y $g(x) = \frac{1}{x^3} + 4$

f. $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = \frac{x}{x+2}$

g. $f(x) = \frac{x}{x+3}, \quad g(x) = \frac{x}{x-3}$

64. Evalúe la función en los valores indicados:
a.

Evaluar: $f(0), f(5), f(-3), f(2)$ en:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ \ x < 0 \\ x-5 & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$$

b.

c.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$f(-4), f(-\frac{3}{2}), f(-1), f(0), f(25)$

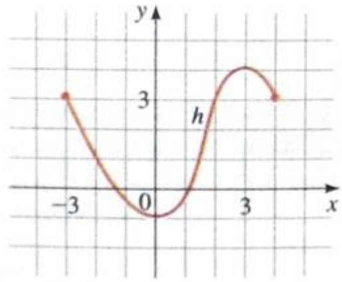
$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$f(-5), f(0), f(1), f(2), f(5)$

65. Se da la gráfica de la función h(x)

a) Determine $h(-2)$, $h(0)$, $h(2)$ y $h(3)$.

b) Halle el dominio y el rango de h.

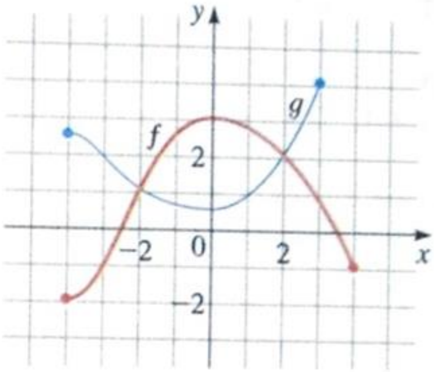


66. Se dan las gráficas de las funciones f(x) y h(x)

a) ¿Cuál es más grande, $f(0)$ o $g(0)$?

b) ¿Cuál es más grande, $f(-3)$ o $g(-3)$?

c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = g(x)$?



CAPITULO III. LÍMITES Y CONTINUIDAD.

OBJETIVOS

- .Dada la gráfica de una función , determinar si la función es contínua o no.
- Dada una función cualquiera f(x), los estudiantes escribirán las condiciones que deben verificarse para que una recta x=a sea una asíntota vertical de la gráfica de la función dada.
- Con base en la definición de continuidad en un intervalo dado, los alumnos determinarán en qué intervalos son continuas las funciones dadas.
- Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales la continuidad o discontiniuidad de ciertos fenómenos que se presentan en la vida cotidiana.
- Obtener información de ciertas gráficas continuas o discontínuas e interpretar ciertos fenómenos y sus limitaciones o restricciones en ciertos puntos o intervalos.
- El estudiante interpretará mejor en el lenguaje cotidiano el significado de límite o tolerancia de ciertas situaciones sociales, que le ayudarán a su crecimiento personal.
- El estudiante interpretará la continuidad o discontinuidad de alguna situación problemica o social y podrá actuar por su formación académica y humanística en la solución de dicho problema.

DIAGNOSTICO

Calcular: (a) a^0 (b) $\sqrt{-4}$ (c) $\frac{5}{0}$ (d) $\frac{0}{0}$

(e) $\frac{5}{10000^{1000}}$ (f) $\frac{5}{10000^{-1000}}$ (g) $\sqrt[5]{-32}$

(h) $\frac{\forall x \in \Re^+}{\to 0^+}$ (i) $\frac{\forall x \in \Re^+}{\to 0^-}$ (j) $\frac{0}{5}$

3.1. CONCEPTO INTUITIVO DE LÍMITE

Examinemos lo que sucede con la función f(x) = 2x + 3 cuando X tiende a 1 (X→1). Permitiremos que X tome la sucesión de valores 0.8, 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, que sin duda se acercan cada vez más a 1. Los valores correspondientes de f(x) están dados por la tabla:

X	0.8	0.9	0.99	0.999	0.9999
Y	4.6	4.8	4.98	4.998	4.9998

A partir de esta tabla es claro que a medida que X se acerca a 1, f(x) está cada vez más cerca de 5. Escribimos entonces f(x) tiende a 5 (f(x)→5) cuando X tiende a 1 (X→1).

Los valores de X considerados en la tabla anterior son menores que 1. En tal caso, decimos que X se aproxima a 1 por la izquierda. Podemos considerar también el caso alternativo en que X se aproxima a 1 por la derecha; es decir, X toma una sucesión de valores que están cada vez más cerca de 1 pero siempre son mayores que 1. Por ejemplo, podríamos permitir que X tomara la sucesión de valores 1.5, 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001. Los valores correspondientes de f(x) están dados en la tabla:

X	1.5	1.1	1.01	1.001	1.0001
Y	6	5.2	5.02	5.002	5.0002

Otra vez, es claro que f(x) está cada vez más cerca de 5 cuando X se aproxima a 1 por la derecha. En consecuencia, cuando X se aproxima a 1 por la izquierda o por la derecha, f(x) = 2X + 3 se acerca a 5. Decimos que el límite (o valor límite) de f(x) cuando X tiende a 1 es igual a 5, esto se denota así:

$$\lim_{x \to 1} (2x+3) = 5$$

Damos ahora la definición formal de límite.

Definición. Sea f(x) una función que está definida en todos los valores de X cerca de C, con la excepción posible de C mismo. Se dice que L es el límite de f(x) cuando X tiende a C, si la diferencia entre f(x) y L puede hacerse tan pequeña como se desee, con sólo restringir a X a estar lo suficientemente cerca de C. En símbolos, escribimos. $\lim_{x \to c} f(x) = L$

3.2. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Para determinar límites no siempre hace falta calcular los valores de la función o esbozar una gráfica. De manera alternativa hay varias propiedades de los límites que podemos emplear; las siguientes pueden parecerle razonables.

1. Si f(x) = C es una función constante, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} C = C$$

2. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$, para cualquier entero positivo n

Ejemplo 1. (a) $\lim_{x \to 2} 7 = 7$, **(b)** $\lim_{x \to -5} 7 = 7$, **c)** $\lim_{x \to 6} x^2 = 6^2 = 36$,

(d) $\lim_{t \to -2} t^4 = (-2)^4 = 16$

Algunas otras propiedades de los límites son:

Si $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ existe, entonces:

3. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
4. $\lim_{x \to a} [f(x).g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x)$
5. $\lim_{x \to a} [c.f(x)] = c. \lim_{x \to a} f(x)$, donde C es cte.

Si $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$ existe, entonces:

6. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, \quad si \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$
7. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$

Ejemplo 2. (a) $\lim_{x \to 2} (x^2 + x) = \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} x \quad (P.3) = 2^2 + 2 = 6 \ (P.2)$

(b) $\lim_{g \to -1} (g^3 - g + 1) = \lim_{g \to -1} g^3 - \lim_{g \to -1} g + \lim_{g \to -1} 1 = (-1)^3 - (-1) + 1 = 1$

(c) $\lim_{x \to 2} [(x+1).(x-3)] = \lim_{x \to 2} (x+1). \lim_{x \to 2} (x-3) \quad (P.4)$

$\left[\lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 1\right] . \left[\lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} 3\right] = [2+1].[2-3] = -3$

(d) $\lim\limits_{x \to -2} 3x^3 = 3 . \lim\limits_{x \to -2} x^3$ (P.5) $=3(-2)^3 = -24$

Ejemplo 3. (a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^3 + 4} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 1} \left(2x^2 + x - 3\right)}{\lim\limits_{x \to 1} \left(x^3 + 4\right)} = \dfrac{2 + 1 - 3}{1 + 4} = \dfrac{0}{5} = 0$

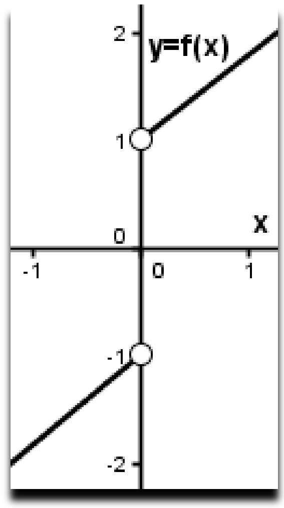
(b) $\lim\limits_{t \to 4} \sqrt{t^2 + 1} = \sqrt{4^2 + 1} = \sqrt{17}$

3.3. LIMITES LATERALES

La figura muestra la gráfica de una función f. Observe que f(x) no está definida cuando x=0 (es decir f(0) no existe). Cuando x tiende a cero por la derecha, f(x) tiende a 1.

Escribimos como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

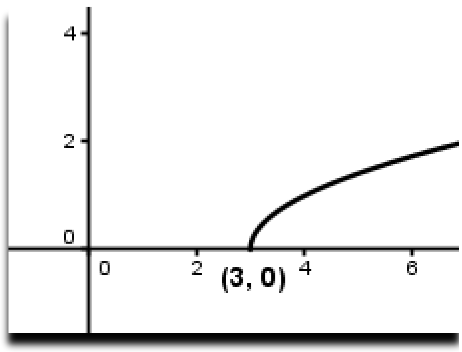
Por otra parte, cuando x tiende a cero por la izquierda, f(x) tiende a –1 y escribimos $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$



Los límites como éstos se llaman límites laterales o (unilaterales).

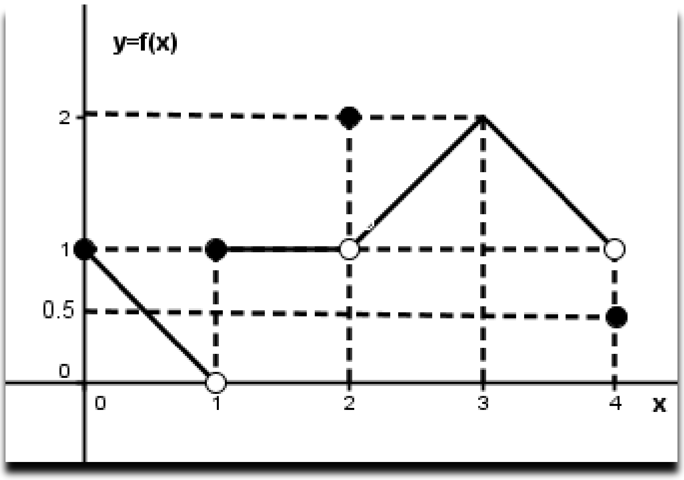
El límite existirá sí y sólo sí, ambos límites existen y son iguales. Por lo tanto concluimos que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *no existe*

Como otro ejemplo de un límite lateral, considere $f(x) = \sqrt{x - 3}$ cuando x tiende a 3. Ya que f está definida cuando x≥3; o sea, el dominio es x≥3. Podemos hablar del límite cuando x tiende a 3 por la derecha, entonces x-3 es un número positivo cercano a cero, y de este modo $\sqrt{x - 3}$ es cercano a cero.



Concluimos que $\lim_{x\to 3^+} \sqrt{x-3} = 0$, pero $\lim_{x\to 3} \sqrt{x-3}$ no existe porque $\lim_{x\to 3^-} \sqrt{x-3}$ no existe.

Ejemplo 4. Para la gráfica analizar los limites en x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4; y f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)



Solución:

- En x = 0: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ no existe; por lo tanto $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe

  (La función no está definida a la izquierda de x = 0).Pero f(0) = 1
- En x = 1: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$; a pesar de que f(1) = 1.

  y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$. Por lo tanto $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe. (Los límites por la derecha y por la izquierda son distintos).

- En x = 2: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$; por lo tanto $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$. Más sin embargo f (2) = 2

- En x = 3: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$; por lo tanto $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$. Además, f (3) =2 también.

- En x = 4: $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$, a pesar de que f(4) = 0.5

  $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ No existe; Por lo tanto $\lim_{x\to 4} f(x)$ tampoco existe.

  (La función no está definida a la derecha de x = 4)

Ejemplo 5. Encontrar $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$

Solución: $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x \to 5} \left(2x^2\right) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4$

$= 2 \lim_{x \to 5} \left(x^2\right) - 3 \lim_{x \to 5} (x) + \lim_{x \to 5} 4 = 2 * 5^2 - 3 * 5 + 4 = 39$

Ejemplo 6 Encontrar $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$ y justificar cada paso.

Solución:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{\lim_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x \to -2} (5 - 3x)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to -2} x^3 + 2 \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\lim_{x \to -2} 5 - 3 \lim_{x \to -2} x} = \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -1/11$$

3.4. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Una función es continua cuando su gráfica no sufre interrupción en un punto “c”, que ni se rompe, ni tiene saltos o huecos.

3.4.1. *CONTINUIDAD EN UN PUNTO.* Una función f se dice que es continua en un punto “c”, si cumple:

- ✓ Si f (c) está definida.(existe)
- ✓ Si $\lim_{x \to c} f(x)$ Existe.
- ✓ Si $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$

3.4.2. *CONTINUIDAD EN UN INTERVALO*. Una función es continua en un intervalo (a,b), si y solo si, la función es continua en todos los puntos dentro del intervalo.

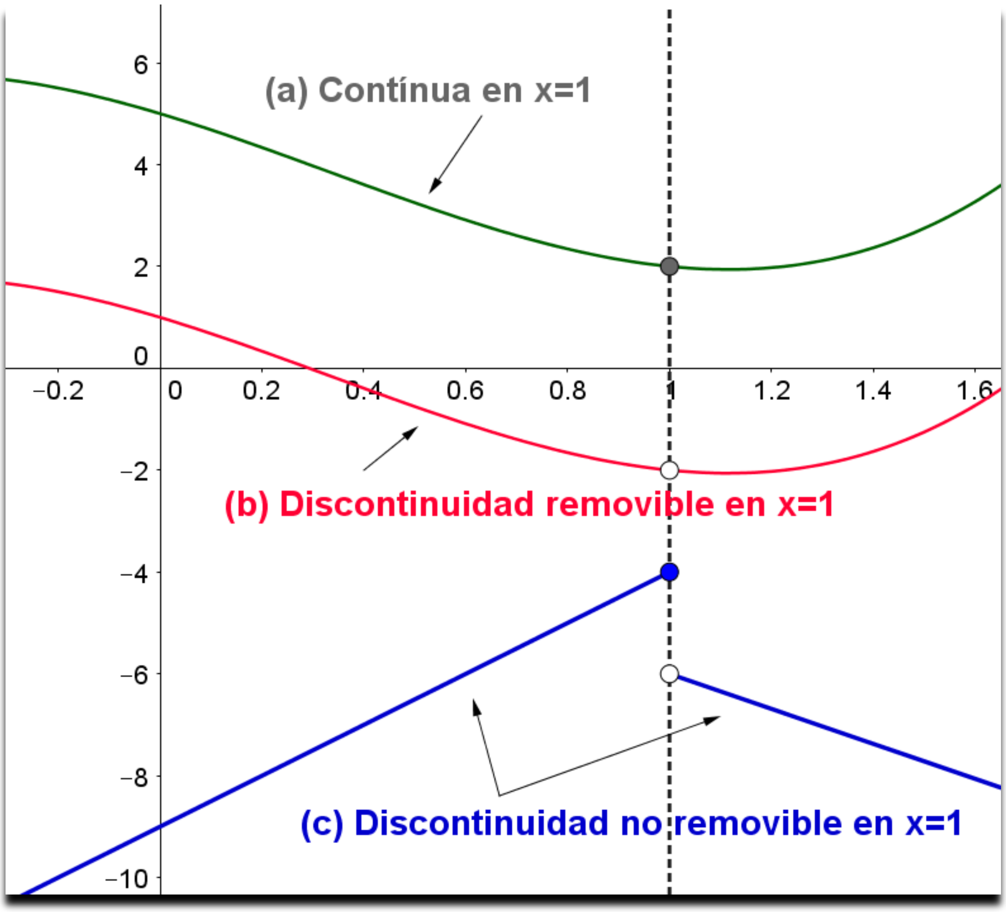
3.5. FUNCIONES DISCONTINUAS

Una función es discontinua si el $\lim_{x \to c} f(x)$ no existe. Hay discontinuidades evitables y no evitables. Una discontinuidad se dice evitable si f puede hacerse continua redefiniendo la función en x = c.

Resumiendo:

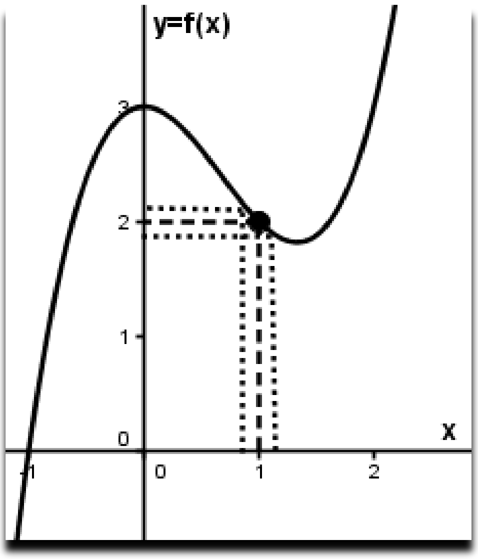
A. y= *f* (x) es continua en x= a, sí: **1.** $f(a)= L \neq \pm \infty$ (existe) **2.** $\lim_{x \to a} f(x)= L \neq \pm \infty$ **3.** $f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = L$
B. Sí $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L \neq \pm \infty$ $\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$ (existe)
C. Si y= *f* (x) es discontinua en x= a; pero $\lim_{x \to a} f(x) = L \neq \pm\infty$ (existe); $\Rightarrow$ y= *f* (x) es discontinua evitable en x= a

<u>Tengamos en cuenta lo siguiente, lo cual es muy intuitivo:</u>



3.6. EJEMPLOS DE ANÁLISIS DE CONTINUIDAD EN FUNCIONES POR TRAMOS

Ejemplo 6. Analizar continuidad en x=1, dada la gráfica.



Solución: Para que y=f(x) sea continua en x=1 debe cumplir las siguientes condiciones:

i. f(1)=2 (existe)

f de 1 significa que cuando la "x" toma **exactamente** el valor de 1, la "y" toma **exactamente** el valor de 2.

$$\text{ii}.\ \boldsymbol{\lim_{x\to 1} f(x)} \Big\}\ \boldsymbol{limite\ cuando\ x\ tiende\ a\ 1\ de\ f(x)}$$

Significa que la "x" toma **valores supremamente cercanos a** "1", **sin jamás tomar el valor de** "1"

$$\underbrace{\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2^- = 1.99999\ldots \approx 2}_{\substack{Limite\ cuando\ \text{“x”}\ tiende\ a\ 1\ por\ la\ derecha \\ de\ f(x).\ La\ \text{“x”}\ toma\ el\ valor\ de\ 1{,}000\ldots 1;\ y \\ la\ \text{“y”}\ toma\ el\ valor\ de\ 1{,}99999\ldots\ldots}}$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2^+ = 2{,}000\ldots 1 \approx 2}_{\substack{Limite\ cuando\ \text{“x”}\ tiende\ a\ 1\ por\ la\ izquierda \\ de\ f(x).\ La\ \text{“x”}\ toma\ el\ valor\ de\ 0{,}9999999\ldots.;\ y \\ la\ \text{“y”}\ toma\ el\ valor\ de\ 2{,}0000\ldots.1}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2}$$

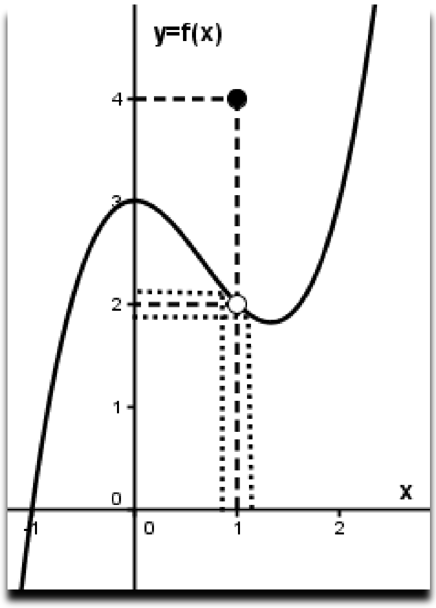
$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 1} f(x) = 2\ (existe)}$$

$$\boldsymbol{\text{iii. } f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2} \qquad \Rightarrow$$ **f(x) es continua en x=1**

https://www.youtube.com/watch?v=0IGjuz6Wq-E

Ejemplo 7. Analizar continuidad en x=1, dada la gráfica.



Solución: Para que y=f(x) sea continua en x=1 debe cumplir las siguientes condiciones:

i .f(1)=4 (existe)

f de 1 significa que cuando la "x" toma **exactamente** el valor de 1, la "y" toma **exactamente** el valor de 4.

ii . $\lim_{x \to 1} f(x) \Big\} \; \textit{limite cuando x tiende a 1 de } f(x)$

Significa que la "x" toma **valores supremamente cercanos a** "1", **sin jamás tomar el valor de** "1"

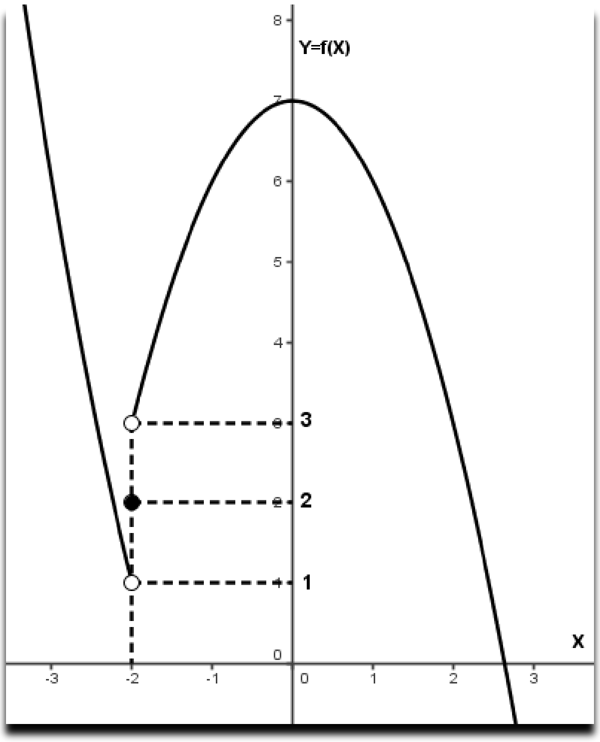
$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2^- = 1.99999\ldots \approx 2}_{\substack{\textit{Limite cuando "x" tiende a 1 por la derecha} \\ \textit{de } f(x)\textit{. La "x" toma el valor de } 1{,}000\ldots 1\textit{; y} \\ \textit{la "y" toma el valor de } 1{,}99999\ldots\ldots}} \\ \\ \underbrace{\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2^+ = 2{,}000\ldots 1 \approx 2}_{\substack{\textit{Limite cuando "x" tiende a 1 por la izquierda} \\ \textit{de } f(x)\textit{. La "x" toma el valor de } 0{,}9999999\ldots\textit{; y} \\ \textit{la "y" toma el valor de } 2{,}0000\ldots 1}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \\ \Downarrow \\ \lim_{x \to 1} f(x) = 2 \; (\textit{existe}) \end{array}$$

iii. $\underbrace{f(1)}_{\substack{\downarrow \\ 4}} \neq \underbrace{\lim_{x \to 1} f(x)}_{\substack{\downarrow \\ 2}}$ $\Rightarrow$ **f(x) es discontinua en x=1 removible porque**

$$\lim_{x \to 1} f(x) \; \textit{existe}$$

https://www.youtube.com/watch?v=NUwuyzorKcM

Ejemplo 8. Analizar continuidad en x=-2, dada la gráfica.



Solución: Para que y=f(x) sea continua en x=-2 debe cumplir las siguientes condiciones:

i. f(-2)=2 (existe)

f de -2 significa que cuando la "x" toma **exactamente** el valor de -2, la "y" toma **exactamente** el valor de 2.

ii. $\lim_{x \to -2} f(x) \Big\}$ *limite cuando x tiende a −2 de f(x)*

Significa que la "x" toma **valores supremamente cercanos a** "-2", **sin jamás tomar el valor de** "-2"

$$\underbrace{\lim_{x \to -2^+} f(x) = 3^+ = 3{,}0000\ldots1 \approx 3}_{\text{Limite cuando "x" tiende a } -2 \text{ por la derecha de } f(x).\text{ La "x" toma el valor de } -1{,}99999\ldots;\ y \text{ la "y" toma el valor de } 3{,}0000\ldots1}$$

$$\underbrace{\lim_{x \to -2^-} f(x) = 1^+ = 1{,}000\ldots1 \approx 1}_{\text{Limite cuando "x" tiende a } -2 \text{ por la izquierda de } f(x).\text{ La "x" toma el valor de } -2{,}0000\ldots1;\ y \text{ la "y" toma el valor de } 1{,}0000\ldots1}$$

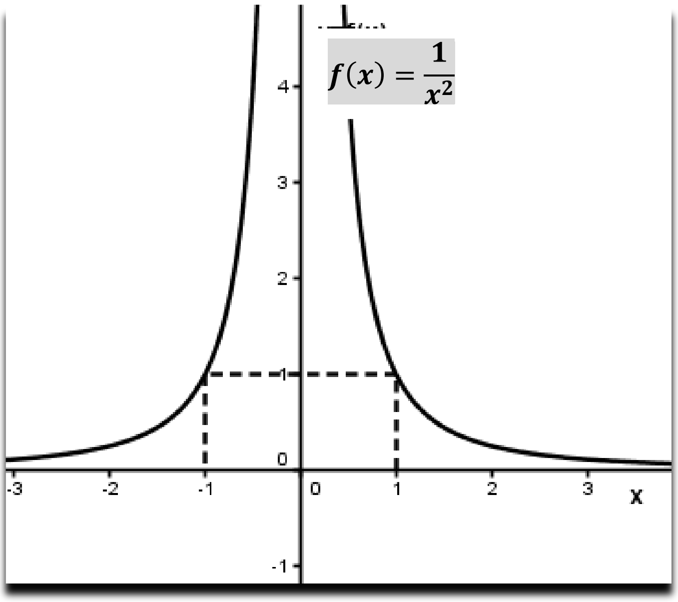
$$\Rightarrow \overbrace{\lim_{x \to -2^+} f(x)}^{\substack{3 \\ \uparrow}} \neq \overbrace{\lim_{x \to -2^-} f(x)}^{\substack{1 \\ \uparrow}} \Downarrow \lim_{x \to -2} f(x) = (\text{no existe})$$

⇒ **f(x) es discontinua en x=-2 no removible porque**

$$\lim_{x \to -2} f(x) \ \textit{no existe}$$

https://www.youtube.com/watch?v=-XHVXeBJlrA

Ejemplo 9. Analizar continuidad en x=0, dada la gráfica.



Solución: Para que y=f(x) sea continua en x=0 debe cumplir las siguientes condiciones:

i. f(0)=? (no existe)

f de "0" significa que cuando la "x" toma **exactamente** el valor de "0", la "y" **no toma ningún valor**.

$$\text{ii. } \lim_{x \to 0} f(x) \Big\} \; \textit{limite cuando x tiende a "0" de } f(x)$$

Significa que la "x" toma **valores supremamente cercanos a** "0", **sin jamás tomar el valor de** "0"

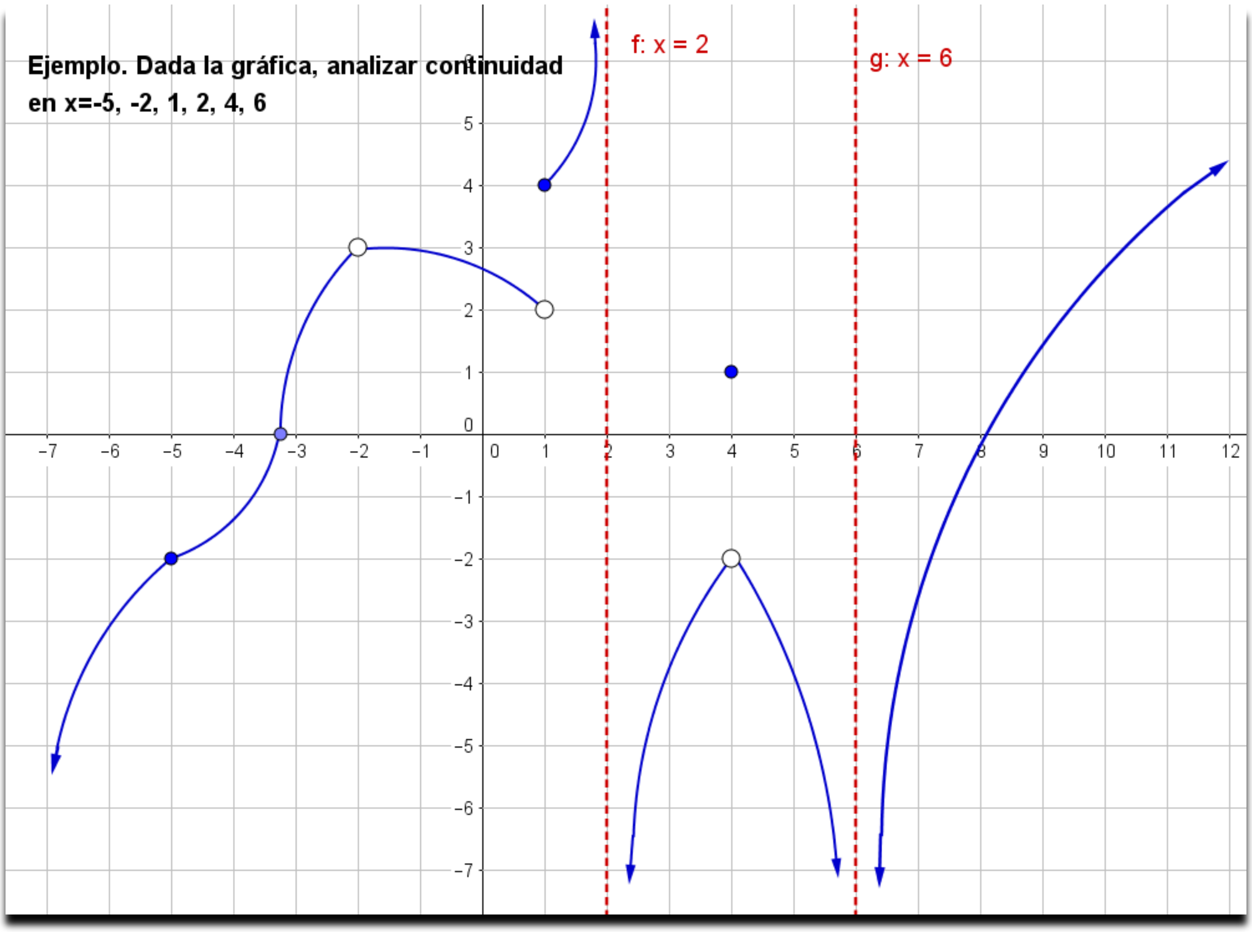
$$\left.\begin{array}{c} \underbrace{\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \; (no\ es\ un\ valor\ real)}_{\substack{Limite\ cuando\ \text{x" tiende a "0"}\ por\ la\ derecha \\ de\ f(x).\ La\ \text{"x"}\ toma\ el\ valor\ de\ 0{,}000\ldots 1;\ y \\ la\ \text{"y"}\ es\ infinito\ (infinito\ es\ una\ expresiòn, pero \\ no\ es\ un\ valor\ real)}} \\ \\ \underbrace{\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \; (no\ es\ un\ valor\ real)}_{\substack{Limite\ cuando\ \text{x" tiende a 0"}\ por\ la\ izquierda \\ de\ f(x).\ La\ \text{"x"}\ toma\ el\ valor\ de\ -0{,}000\ldots 1;\ y \\ la\ \text{"y"}\ es\ infinito}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \Downarrow \\ \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \; (\boldsymbol{no\ existe}) \end{array}$$

⇒ **f(x) es discontinua en x=0 no removible porque**

$$\lim_{x \to 0} f(x) \; no\ existe$$

https://www.youtube.com/watch?v=zU1xh5tjN1c

Ejemplo 10.



Solución:

Analicemos continuidad en x= - 5

i. $f(-5) = -2$ (existe)

ii. $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x) = -2$

$\lim\limits_{x \to -5^-} f(x) = -2$

$\lim\limits_{x \to -5} f(x) = -2$ (existe)

iii. $f(-5) = \lim\limits_{x \to -5} f(x) = -2 \Rightarrow$ $f(x)$ es continua en x= - 5

Analicemos continuidad en x= - 2

i. $f(-2) =$ (no existe)

ii. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 3$ (existe)

Por lo tanto f(x) es discontinua en x=-2 removible

Analicemos continuidad en x= 1

i. f (1) = 4 (existe)

ii. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$

$\Bigg\}\ \lim\limits_{x \to 1} f(x) =$ (no existe)

Por lo tanto f(x) es discontinua en x=1 no removible

Analicemos continuidad en x= 2

i. f (2) = (no existe)

ii. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

$\Bigg\}\ \lim\limits_{x \to 2} f(x) =$ (no existe)

Por lo tanto f(x) es discontinua en x=2 no removible

Analicemos continuidad en x= 4

i. f (4) = 1 (existe)

ii. $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -2$

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -2$

$\Bigg\}\ \lim\limits_{x \to 4} f(x) = -2$ (existe)

iii. $f(4) \neq \lim\limits_{x \to 4} f(x) \Rightarrow$ f (x) es discontinua en x= 4 removible

Analicemos continuidad en x= 6

i. f (6) = (no existe)

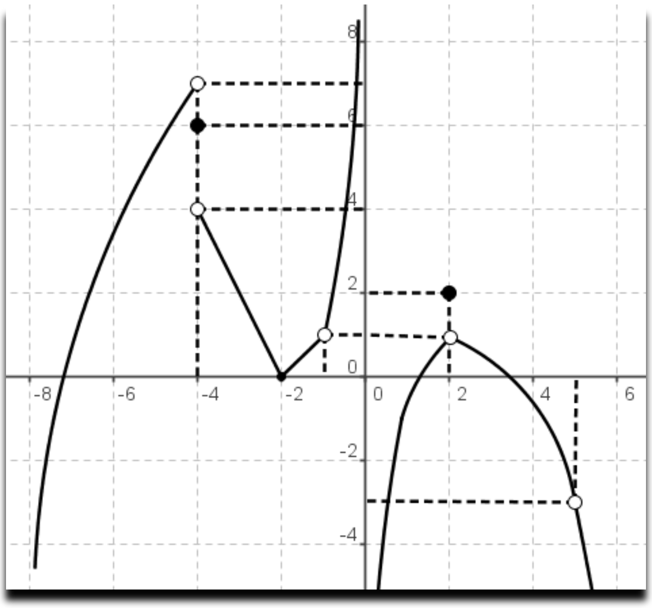
ii. $\lim\limits_{x \to 6^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = -\infty$

$\Bigg\}\ \lim\limits_{x \to 6} f(x) = -\infty$ (no existe) (∞ no es un número; es una expresión)

Por lo tanto f(x) es discontinua en x=6 no removible

https://www.youtube.com/watch?v=BrrNm1XzDdE



Ejemplo 10.1. En la gráfica que se proporciona, analizar la continuidad en x=- 4,
-2, -1, 0, 2, 5 y tipo de discontinuidad; cual sería *f* (x)

Solución:

Analicemos continuidad **en x= -4**

1. *f* (-4) = 6
2. $\lim_{x \to -4^-} f(x) = 7$
$\lim_{x \to -4^+} f(x) = 4$

$\Rightarrow \lim_{x \to -4} f(x)$ no existe, entonces *f* (x) es discontinua, no removible en x= -4.

Analicemos continuidad **en x= -2:**
1. *f* (-2) = 0
2. $\lim_{x \to -2} f(x) = 0$
3. $f(-2) = \lim_{x \to -2} f(x) = 0 \Rightarrow f(x)$ es continua en x= -2

Analicemos continuidad **en x= -1:**
1. *f* (-1) = ?
2. $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1$
$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to -1} f(x) = 1$, existe, entonces *f* (x)

f(x) es discontinua removible en x= -1

Analicemos continuidad **en x= 0:**

1. *f* (0) =? (no existe) $\Rightarrow$*f* (x) es discontinua en x=0

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{2. } \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \\ \\ \textbf{3. } \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ es discontinua en } x = 0, \text{ no removible.}$$

Analicemos continuidad **en x= 2:**

1. $f(2) = 2 \Rightarrow$ (existe)

2. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad$ (existe)

3. $f(2) \neq \lim\limits_{x \to 2} f(x) \quad \Rightarrow f(x)$ es discontinua en x=2 removible.

$\quad 2 \quad \neq 1$

Analicemos continuidad en **X=5:**

1. $f(5) = ?$ $\quad \Rightarrow$No existe,$\Rightarrow$ es discontinua en x= 5.

2. $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = -3$, $\Rightarrow f(x)$ es discontinua en x= 5 removible.

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x < -4 \\ 6, & \text{si } x = -4 \\ h(x), & \text{si } -4 < x \leq -2 \\ i(x), & \text{si } -2 < x < -1 \\ j(x), & \text{si } -1 < x < 0 \\ l(x), & \text{si } x > 0;\ x \neq 2;\ 5 \\ 2, & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Ejemplo 11: Halle $\lim\limits_{x \to 6} x^2$

Solución: $\lim\limits_{x \to 6} x^2 = 6^2 = 36$

$$\lim_{x \to 6^+} x^2 = (6^+)^2 = (6{,}0000\ldots1)^2 = 36{,}0000\ldots1 \approx 36$$

$$\lim_{x \to 6^-} x^2 = (6^-)^2 = (5{,}9999\ldots)^2 = 35{,}999\ldots \approx 36$$

https://www.youtube.com/watch?v=7mfqil9pCN0

Ejemplo 12: Halle $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x^2-9}$

Solución:

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{x^2-9} = \sqrt{3^2-9} = \underbrace{\sqrt{\approx 0}}_{¡peligro!} \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x^2-9} = \sqrt{(3^+)^2-9} = \sqrt{9^+-9} = \sqrt{0^+} \approx 0^+ = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} \sqrt{x^2-9} = \sqrt{(3^-)^2-9} = \sqrt{9^--9} = \sqrt{0^-} = i \end{cases}$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x^2-9}$ no existe

Ejemplo 13: Halle $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x}{x^2-4}$

Solución: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x}{x^2-4} = \frac{3*2}{2^2-4} = \frac{6}{\underbrace{\approx 0}}$ ¡*peligro*!

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{3x}{x^2-4} \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{3x}{x^2-4} = \frac{3*2}{(2^+)^2-4} = \frac{6}{4^+-4} = \frac{6}{0^+} = \infty \\ \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{3x}{x^2-4} = \frac{3*2}{(2^-)^2-4} = \frac{6}{4^--4} = \frac{6}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

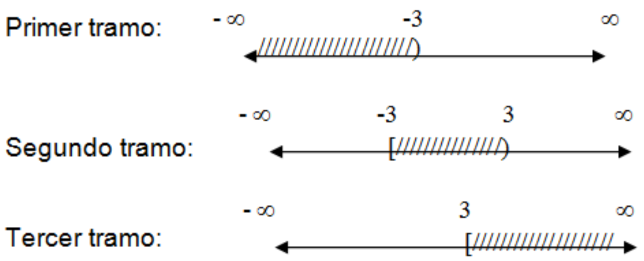
$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{3x}{x^2-4} \ no\ existe$$

https://www.youtube.com/watch?v=zVVwRv3hHhg

Ejemplo 14. Dada y=f(x), analizar continuidad y graficar

$$f(x) = \begin{cases} x-3, & si & x < -3 \\ x^2-4, & si & -3 \le x < 3 \\ 5, & si & x \ge 3 \end{cases}$$

Solución: En ninguno de los tres tramos hay limitantes, sino condicionantes. Los dominios de cada tramo son:



Sólo podría haber discontinuidad cuando la función cambia de un tramo a otro.

Analicemos continuidad en **x= -3:**

1. f(-3)= $(-3)^2$- 4 = 9 - 4=5. Es donde la x toma exactamente el valor de –3, o sea en el segundo tramo.

2. $\lim\limits_{x \to -3^+} (x^2 - 4) = (-3)^2 - 4 = 5$ y $\lim\limits_{x \to -3^-} (x - 3) = -3 - 3 = -6$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -3^+} f(x) \neq \lim_{x \to -3^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to -3} f(x) \quad \textit{no existe}$$

⇒f(x) es discontinua en x= - 3 no evitable

Analicemos continuidad en **x= 3:**

1. f(3)= 5. Es donde la x toma exactamente el valor de 3, o sea en el tercer tramo.

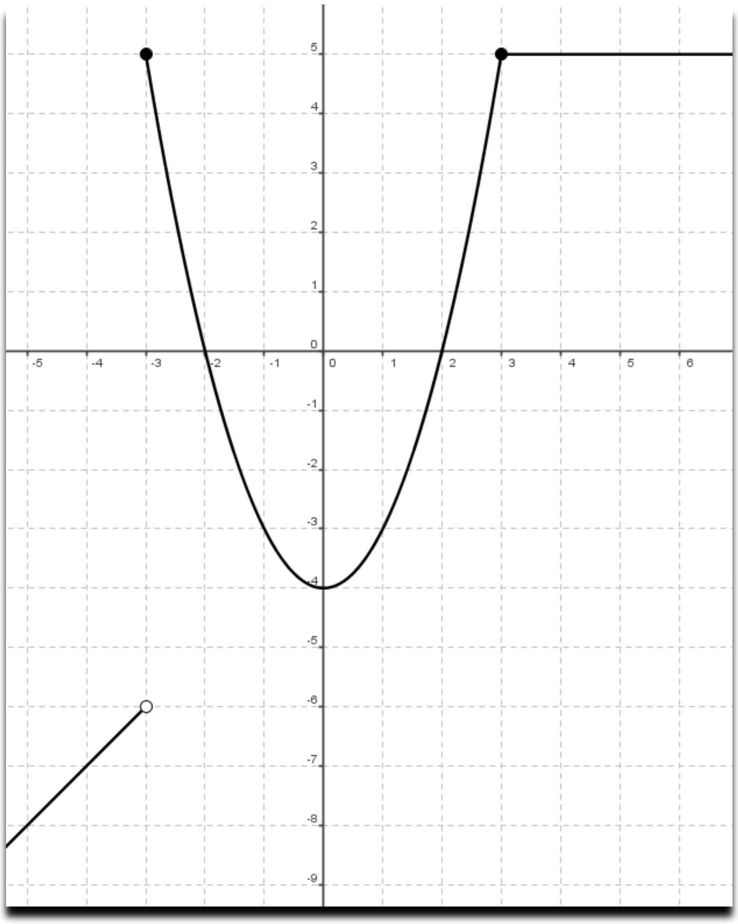
2. $\lim\limits_{x \to 3^+} 5 = 5 \quad y \quad \lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 - 4) = 3^2 - 4 = 5$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = 5 \quad \text{Existe}$$

⇒f(x) es continua en x= 3

-3	-5		-3	-2	-1	0	1	2	3
-6	-8		5	0	-3	-4	-3	0	5

x-3 $\quad\quad x^2 - 4$



Ejemplo 15. Analizar continuidad y grafique

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+3, & si\ x<0 \\ 2x+3, & si\ 0\le x<3 \\ 2, & si\ x=3 \\ -x^2+2x+9, & si\ x>3 \end{cases}$$

Solución: En x = 0:

1. $f(0) = 2(0) + 3 = 3$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} (2x+3) = 3$; $\lim\limits_{x\to 0^-} (x^2+2x+3) = 3$ $\quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$

3. $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$; $\quad \Rightarrow f(x)$ es continua en x = 0

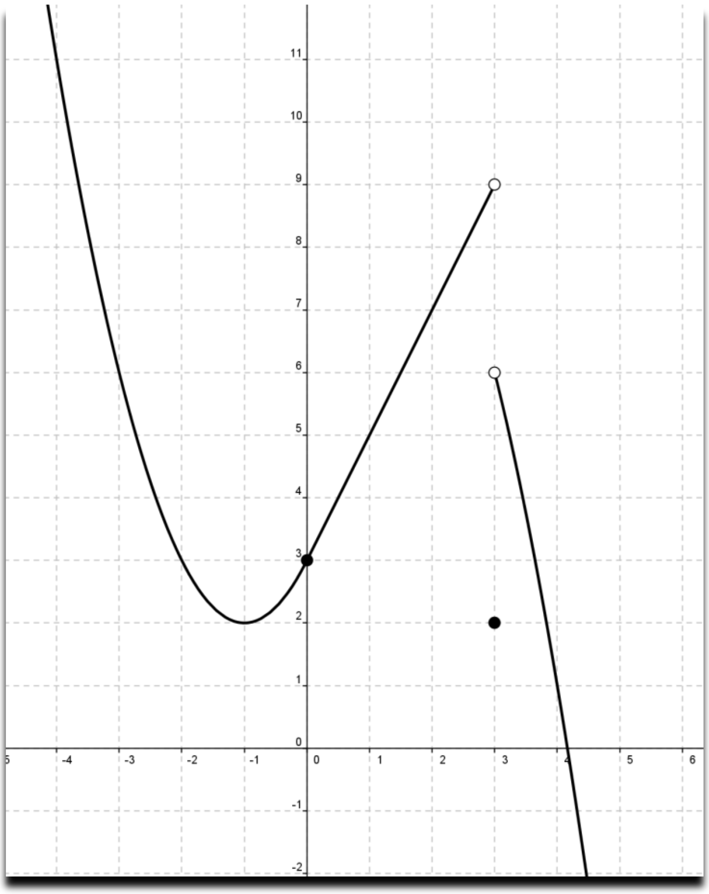
En x **=3;**

1. $f(3) = 2$

2. $\lim\limits_{x\to 3^+} (-x^2+2x+1) = -9+6+9 = 6$; $\lim\limits_{x\to 3^-} (2x+3) = 6+3 = 9$ $\quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ es discontinua en x = 3 y no evitable.

x	0	-1	-2	-3	0	3	3	4	5
y	3	2	3	6	3	9	6	1	-6



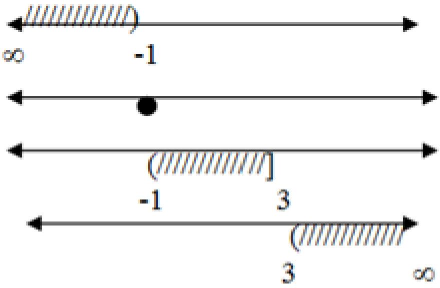
Ejemplo 16.

$$Dada \quad f(x)=\begin{cases} x^2-3, & si \quad x<-1 \\ 4, & si \quad x=-1 \\ -2x-4, & si \quad -1<x\leq 3 \\ \dfrac{3}{x}+2, & si \quad x>3 \end{cases}$$

Analizar continuidad, luego grafique; si hay discontinuidades removibles, redefinir la función para que sea continua en dichos puntos

Solución:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3, & si \quad x<-1 \\ 4, & si \quad x=-1 \\ -2x-4, & si \quad -1<x\le 3 \\ \dfrac{3}{x}+2, & si \quad x>3 \end{cases}$$



1. Analicemos continuidad en **x= -1:**

a. $f(-1) = 4$

b. $\lim\limits_{x\to -1^+}(-2x-4)=-2$, $\quad \lim\limits_{x\to -1^-}(x^2-3)=-2 \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x) = -2$

c. $f(-1) \neq \lim\limits_{x\to -1} f(x)$

$\Rightarrow f(x)$ es discontinua en x=-1 pero es una discontinuidad removible

2. Analicemos continuidad **en x=3**

a. $f(3) = -2_x\, 3 - 4 = -10$

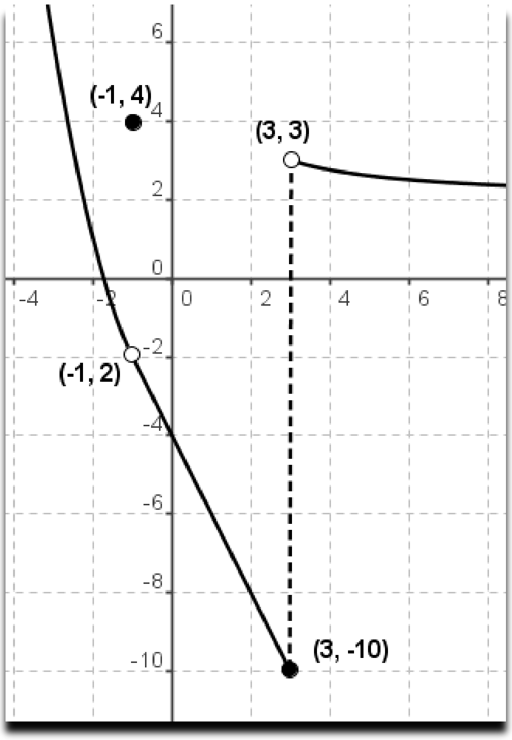
b. $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{3}{x}+2\right)=3$, $\quad \lim\limits_{x\to 3^-}(-2x-4)=-10 \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x) \quad no \quad existe$

$\Rightarrow$ $f(x)$ es discontinua en x=3 y es una discontinuidad no removible.

Grafiquemos ésta función por tramos:

X	-1	-2	-3	-1		-1	3		3	6	9
Y	-2	1	6	4		-2	-10		3	2.5	2.3

$x^2-3 \qquad -2x-4 \qquad \dfrac{3}{x}+2$



Redefinamos la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & si \quad x \leq -1 \\ -2x - 4, & si \quad -1 < x \leq 3 \\ \frac{3}{x} + 2, & si \quad x > 3 \end{cases}$

https://www.youtube.com/watch?v=lY2r4kX6E6k

Ejemplo 17. Analizar continuidad y redefinir f(x) en donde sea la discontinuidad removible. Graficar:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5}, & si \quad x < 2 \\ 5, & si \quad x = 2 \\ x + 1, & si \quad 2 < x \leq 5 \\ 2, & si \quad x > 5 \end{cases}$$

Solución: $x^2 + 5 \geq 0$.

$\geq 0 + 5 \geq 0$ (Siempre será una cantidad positiva, por lo tanto no hay limitantes, la x podría tomar cualquier valor, pero el condicionante dice x<2)

Analicemos continuidad en **x = 2:**

1. f(2) = 5

2. $\lim\limits_{x \to 2^+} (x+1) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{x^2 + 5} = 3 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

3. $f(2) \neq \lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

$\rightarrow f(x)$ Es discontinuidad en x = 2 pero evitable.

Analicemos continuidad **en x = 5:**

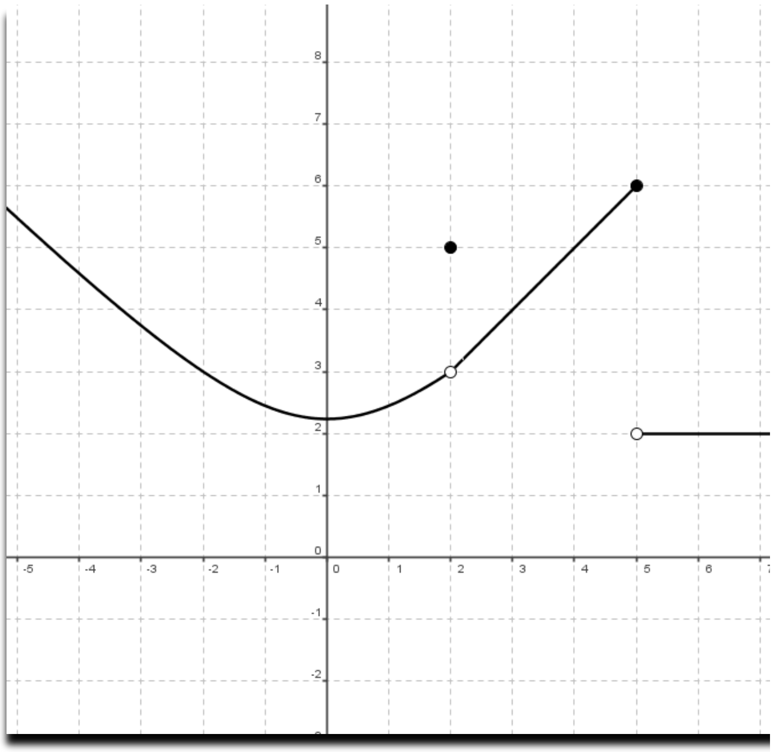
a. f(5) = 5 + 1 = 6

b. $\lim\limits_{x \to 5^+} (2) = 2 \quad y \quad \lim\limits_{x \to 5^-} (x+1) = 6 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 5} f(x)$ no existe

$\to f(x)$ es discontinua en x = 5 y no evitable.

X	2	0	-2	2	5
Y	3	2.2	3	3	6

$\sqrt{x^2+5}$ x + 1

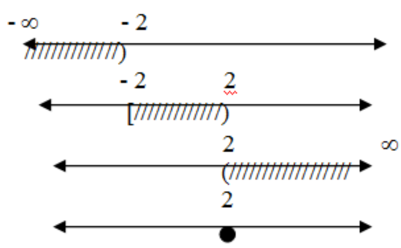


Redefinamos f(x) para que sea continua en x = 2; $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4}, & si \quad x < 2 \\ x+1, & si \quad 2 \le x \le 5 \\ 2, & si \quad x > 5 \end{cases}$

<u>Ejemplo 18</u>. Analizar continuidad y redefinir f(x) en donde sea la discontinuidad removible. Graficar:

$$f(x) = \begin{cases} -2x-6, & si \quad x < -2 \\ x^3+1, & si \quad -2 \le x < 2 \\ 9, & si \quad x > 2 \\ 4, & si \quad x = 2 \end{cases}$$

Solución: $f(x) = \begin{cases} -2x-6, & si \quad x < -2 \\ x^3+1, & si \quad -2 \le x < 2 \\ 9, & si \quad x > 2 \\ 4, & si \quad x = 2 \end{cases}$



Analicemos continuidad en <u>x = -2</u>

a. f(-2) = $(-2)^3$ + 1 = -7

b. $\lim\limits_{x \to -2^+} (x^3 + 1) = -7 \quad y \quad \lim\limits_{x \to -2^-} (-2x - 6) = -2 \quad \Rightarrow \lim\limits_{x \to -2} f(x)$ no existe

$\rightarrow f(x)$ es discontinua en x = -2 y no removible.

Analicemos continuidad en <u>x = 2:</u>

a. f(2) = 4

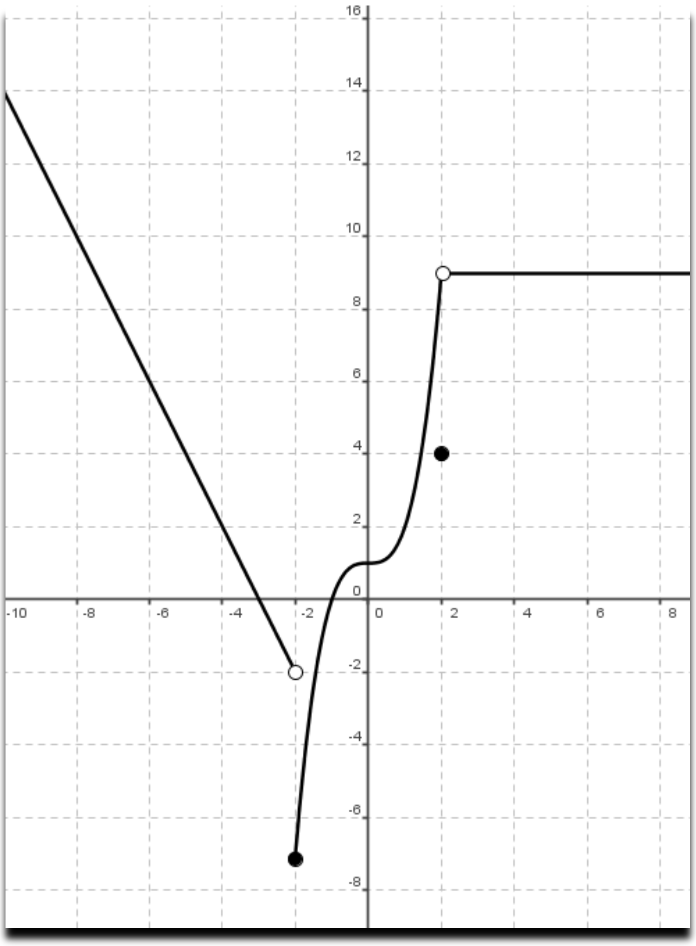
b. $\lim\limits_{x \to 2^+} (9) = 9 \quad y \quad \lim\limits_{x \to 2^-} (x^3 + 1) = 9 \quad \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 9$

c. $f(2) \neq \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

$\rightarrow f(x)$ es discontinua en x = 2, pero evitable.

$\underbrace{-2x-6} \qquad \underbrace{x^3+1}$

X	-2	-4	-2	-1	0	1	2
Y	-2	2	-7	0	1	2	9



Redefinamos f(x) para que sea continua en x = 2:

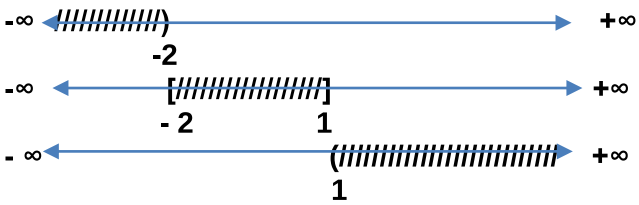
$$f(x) = \begin{cases} -2x - 6, & si \quad x < -2 \\ x^3 + 1, & si \quad -2 \leq x < 2 \\ 9, & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Ejemplo 19. Determinar los valores de las constantes "C" y "K" que hacen que la función sea continua en (-∞,+∞) y trace la gráfica de la función resultante.

$$f(x)=\begin{cases} x+2c, & si \quad x<-2 \\ 3cx+k, & si \quad -2\le x\le 1 \\ 3x-2k, & si \quad 1<x \end{cases}$$

Solución: Hallemos el dominio de cada tramo:

$$f(x)=\begin{cases} x+2c, & si \quad x<-2 \\ 3cx+k, & si \quad -2\le x\le 1 \\ 3x-2k, & si \quad 1<x \end{cases}$$



Como la función es continua en (-∞,+∞); es decir, en todos los reales; obviamente también será continua en los valores de "x" donde cambia de un tramo el otro; es continua en los puntos donde x=-2, y x=1

Como f (x) es continua en x= -2

$\Rightarrow \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x)$

$\Rightarrow \lim_{x\to -2^+} (3cx+k) = \lim_{x\to -2^-} (x+2c)$

$\Rightarrow -6c+k=-2+2c \quad \Rightarrow k-8c=-2$ (1)

Como f (x) es continua en x= 1

$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} (3x-2k) = \lim_{x\to 1^-} (3cx+k)$

$\Rightarrow 3-2k=3c+k \quad \Rightarrow -3k-3c=-3$

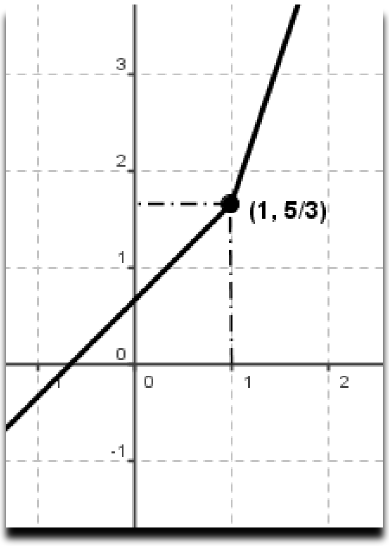
$\div 3 \rightarrow -k-c=-1$ (2)

(1)+ (2) → $-9c=-3$ ⇒c=1/3 en (1) → k-8/3=-2 ⇒ k= 2/3

(1)

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{2}{3}, si\ x<-2 \\ x+\dfrac{2}{3}, si\ -2\le x\le 1 \\ 3x-\dfrac{4}{3}, si\ x>1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{2}{3}, & si \quad x\le 1 \\ 3x-\dfrac{4}{3}, & si \quad x>1 \end{cases}$$



x	-4	1		1	2
y	$-3\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$		$1\frac{2}{3}$	$4\frac{2}{3}$

$x+\dfrac{2}{3}$ $\qquad$ $3x-\dfrac{4}{3}$

https://www.youtube.com/watch?v=YRD-5inD-7Y
https://www.youtube.com/watch?v=2AWc4UHkd2U&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=7eiQ285x-Yk&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?time_continue=3&v=5xySQ0tFW4U&feature=emb_logo

Ejemplo 20. Determinar los valores de las constantes "C" y "K" que hacen que la función sea continua en (- ∞, +∞) y trace la gráfica de la función resultante.

$$f(x)=\begin{cases} x, & si & x\le 1 \\ cx+k, & si & 1<x<4 \\ -2x, & si & 4\le x \end{cases}$$

Solución: f (x) es continua en x =1; $\Rightarrow$

1. f (1) =1

2. $\lim\limits_{x\to 1^+} (cx+k)=c+k$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^-} x=1$ $\qquad$ c+k = 1 (1)

3. f (1) = $\lim\limits_{x\to 1} f$ (x) =1

f (x) = es continua en x=4;$\Rightarrow$

1. f (4) =-2x4 = -8

2. $\lim\limits_{x\to 4^+} (-2x)=-8$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 4^-} (cx+k)=4c+k$

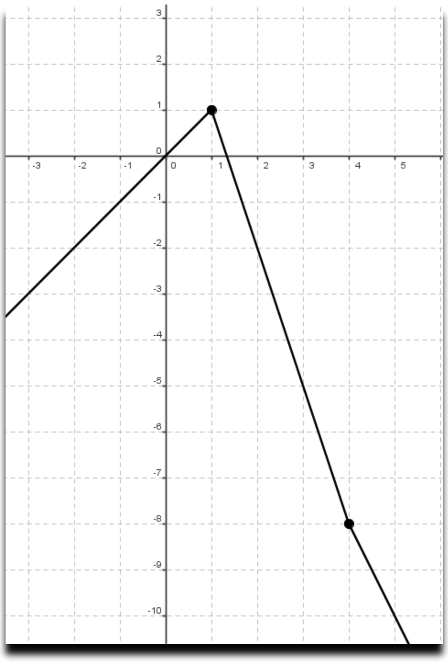
$$4c+k=-8$$
$$-4c-k=8 \quad (2)$$

3. $f(4) = \lim\limits_{x \to 4} f(x)$

(1) + (2) ➔-3c =9 ⇒ c= -3 en (1) ➔-3 +k = 1 ⇒ k = 4

$$f(x) = \begin{cases} x, & si \quad x \le 1 \\ -3x+4, & si \quad 1 < x < 4 \\ -2x, & si \quad 4 \le x \end{cases}$$

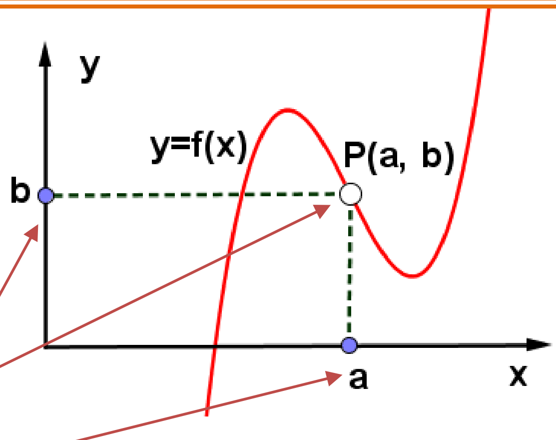
x	-2	1	4	4	5
y	-2	1	- 8	-8	-10



https://www.youtube.com/watch?v=17y1qn__qUc&feature=emb_logo

3.7. EJEMPLOS DE LIMITES DE LA FORMA $\lim\limits_{x \to a \in R} f(x) = \frac{0}{0}$

Cuando se tiene una función y=f(x) y se pide $\lim\limits_{x \to a \in R} f(x) = \frac{0}{0} = ?$ lo cual resulta ser una indeterminación; y se logra vencer la indeterminación; ya sea (i) factorizando y simplificando, o (ii) multiplicando por la conjugada; resulta $\lim\limits_{x \to a \in R} f(x) = b \in R$ y geométricamente resulta el punto **P(a,b)** el cuál es un punto de discontinuidad de la función y=f(x), ya que $\begin{cases} f(a) \; no \; existe \\ \lim\limits_{x \to a \in R} f(x) = b \end{cases}$



Ejemplo 21. Encontrar $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Solución: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{1^2 - 1}{1 - 1} = \dfrac{1-1}{1-1} = \dfrac{0}{0} = ?$ **(indeterminado)**

Hay que tratar de vencer la indeterminación

Se factoriza el numerador como una diferencia de cuadrados y luego se simplifica

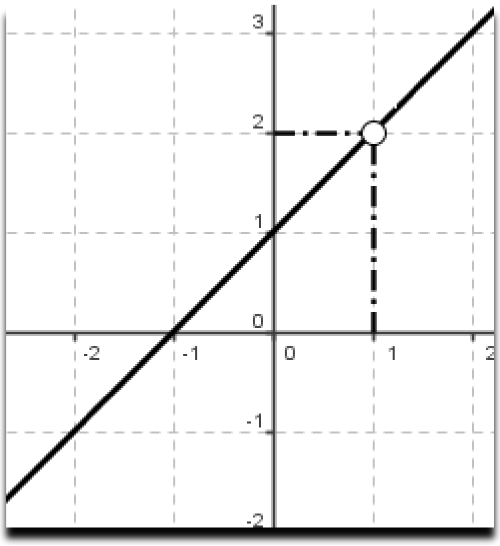
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1)$$

Se logró vencer la indeterminación factorizando

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

$\Downarrow$

$= 1 + 1 = 2 \Rightarrow$ $P_D(1,2) \leftarrow$ Punto de discontinuidad



Ejemplo 22. Encontrar $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t+9} - 3}{t}$

Solución: $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t+9} - 3}{t} = \dfrac{\sqrt{9} - 3}{0} = \dfrac{3-3}{0} = \dfrac{0}{0}$ $(INDETERMINADO)$

En este caso, los pasos algebraicos preliminares consisten en multiplicar por la conjugada del numerador como sigue:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t+9} - 3}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t+9} - 3}{t} \times \frac{\sqrt{t+9} + 3}{\sqrt{t+9} + 3} = \lim_{t \to 0} \frac{\left(\sqrt{t+9}\right)^2 - 3^2}{t.\left(\sqrt{t+9} + 3\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{t + 9 - 9}{t.\left(\sqrt{t+9} + 3\right)} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{t}{t.\left(\sqrt{t+9}+3\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{0+9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

$P_D(0,\ 1/6)$ $\Leftarrow$

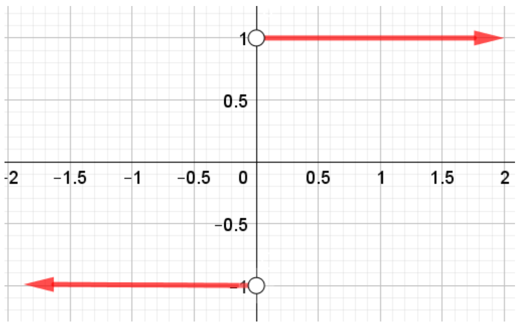
Se logró vencer la indeterminación Multiplicando por la conjugada

Ejemplo 23. Demuestra que $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe

Solución: $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{Bmatrix} \frac{+x}{x} = 1,\ si\ x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1,\ si\ x < 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe

x≠0

Ya que $\lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \quad y \quad \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$



Ejemplo 24. Hallar $\lim_{x \to 2} \frac{2-x}{x^2-4}$

Solución: $\lim_{x \to 2} \frac{2-x}{x^2-4} = \frac{2-2}{4-4} = \frac{0}{0} = ?$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{2-x}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-1}{2+2} = -1/4$$

Ejemplo 25. Hallar $\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\sqrt{5-x^2}-2}$

Solución: $\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\sqrt{5-x^2}-2} = \frac{1-1}{\sqrt{5-1}-2} = \frac{0}{0} = ?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\sqrt{5-x^2}-2} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\left(\sqrt{5-x^2}+2\right)}{\left(\sqrt{5-x^2}-2\right)\left(\sqrt{5-x^2}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\left(\sqrt{5-x^2}+2\right)}{5-x^2-4} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\left(\sqrt{5-x^2}+2\right)}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\left(\sqrt{5-x^2}+2\right)}{(1-x)(1+x)} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{5-x^2}+2\right)}{(1+x)} = \frac{\sqrt{5-1^2}+2}{1+1} = \frac{2+2}{2} = 2$$

Ejemplo 26. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$

Solución: $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{1+x}{x}} = \sqrt{\dfrac{1+0}{0}} = \dfrac{1}{0} = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1+x}}{x} = \sqrt{\dfrac{1+0}{0^+}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1+x}}{x} = \sqrt{\dfrac{1+0}{0^-}} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{x} = \text{no existe}$$

Ejemplo 27. Hallar $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

Solución: $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}} = \sqrt{\dfrac{1^+-1}{1+1}} = \sqrt{\dfrac{0^+}{2}} = 0$

Ejemplo 28. Hallar $\lim\limits_{x\to -4} (x+3)^{1984}$

Solución: $(-4+3)^{1984} = (-1)^{1984} = 1$

Ejemplo 29. Hallar $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x+5}{x^2-25}$; $= \dfrac{5+5}{25-25} = \dfrac{10}{0} = ?$

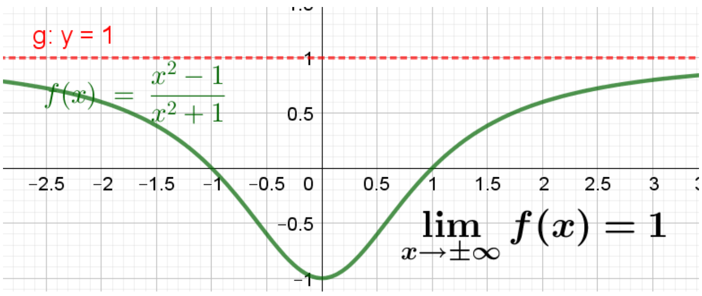
Solución: $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\cancel{(x+5)}}{\cancel{(x+5)}(x-5)} = \dfrac{1}{5-5} = \dfrac{1}{0} = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{1}{x-5} = \dfrac{1}{5^+ - 5} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{1}{x-5} = \dfrac{1}{5^- - 5} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 5} f(x) \text{ no existe}$$

https://www.youtube.com/watch?v=h6zf2MDiQ5U&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=sJeMMDjV9vs&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?time_continue=4&v=mWIQbtZsQ_8&feature=emb_logo

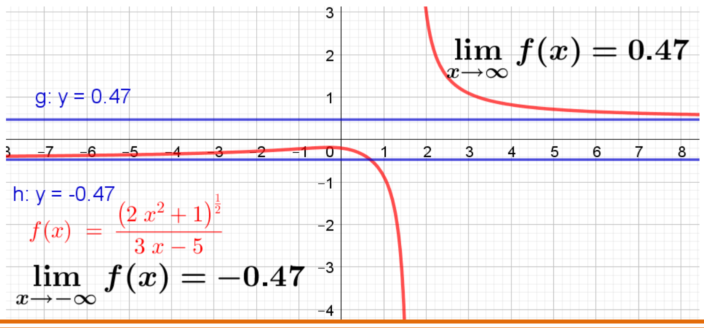
3.8. EJEMPLOS DE LÍMITES DE LA FORMA $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a \in R$

Cuando se tiene una función y=f(x) y se pide $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a \in R$ y el resultado da un número real "a"; y=a sería una asíntota horizontal para la curva y=f(x).



======================

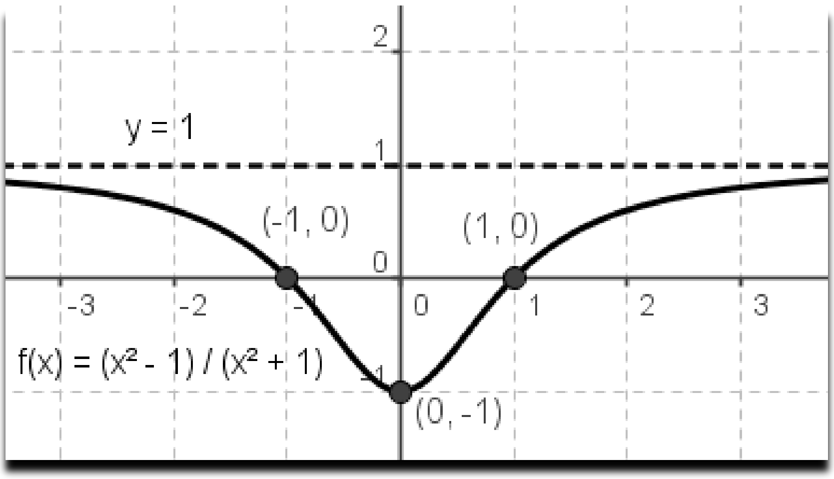
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a \in R$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \in R$; habrían dos asíntotas horizontales para y=f(x)



Investiguemos el comportamiento de la función f definida por: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

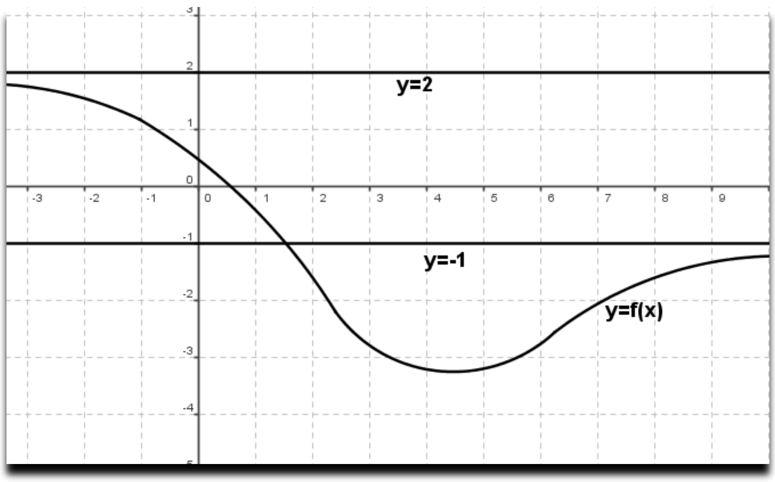
Cuando x adquiere valores muy grandes. La tabla adjunta proporciona los valores de esta función con una exactitud de seis cifras decimales y en la figura se trazó la gráfica de f. Cuando el valor de x crece arbitrariamente se puede ver que los valores de f(x) se acercan más y más a 1. En efecto, podemos ver que se puede hacer que los valores de f(x) se acerquen tanto como se quiera a 1, tomando x suficientemente grande, lo cual podemos expresar simbólicamente escribiendo $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$

X	0	±1	±2	±3	±4	±5	±10	±50	±100	±1000
f(x)	-1	0	0.600	0.800	0.882353	0.923077	0.980198	0.999200	0.999800	0.999998



Por lo tanto, la curva que se muestra en la figura anterior tiene a la recta y = 1 como asíntota horizontal porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$

<u>Ejemplo 30:</u> La curva y= f(x) trazada en la figura siguiente tiene como asíntotas horizontales a las rectas y=-1 y y=2, ya que



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -1$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ $\Rightarrow$ y=-1 y y=2 son A.H.

PROPIEDADES

Sí $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a \neq \pm\infty \rightarrow$ y= a es asíntota horizontal (A.H)

Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \neq \pm\infty \rightarrow$ y= b es A.H.

$\infty^n = \begin{cases} +\infty, \text{ si } n>0 \\ 1, \text{ si } n=0 \\ 0, \text{ si } n<0 \end{cases}$	$\#\,.\infty = \infty$ $+\frac{\#}{\infty} \rightarrow 0^+$ $-\frac{\#}{\infty} \rightarrow 0^-$ $\frac{\infty}{\pm\#} = \pm\infty$	$\frac{+\#}{\rightarrow 0^+} = +\infty$ $\frac{+\#}{\rightarrow 0^-} = -\infty$ $\left.\begin{array}{l} \frac{0}{0} = ? \\ \frac{\infty}{\infty} = ? \\ \infty - \infty = ? \end{array}\right\}$ indeterminación

Ejemplo 31. Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$ e indicar qué propiedades de los límites se emplean en cada paso.

Solución: Para calcular el límite al infinito de una función racional; venciendo la indeterminación…, primero se podría dividir tanto el numerador como el denominador por la mayor potencia presente de x (Se puede suponer que x diferente de 0, ya que solamente interesan valores grandes de x). En este caso, la mayor potencia x es x^2. También se puede en la mayoría de los ejercicios dividir cada término por x elevado a la mayor potencia del denominador. Así que se tiene: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty}\left(3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty}\left(5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\left(3 - \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty^2}\right)}{\left(5 + \frac{4}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}\right)} = \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5} \text{ ; ya que } \frac{+\#}{\infty} \rightarrow 0$$

Se venció la indeterminación dividendo cada termino por x elevada a la mayor potencia del denominador.

https://www.youtube.com/watch?v=5Aj6xF2eJaw&feature=emb_logo

Ejemplo 32. Calcular $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$

Solución: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = \left(\sqrt{\infty^2 + 1} - \infty\right) = \infty - \infty = ?$ Indeterminado

Por lo tanto, procedemos a multiplicar el numerador y el denominador por el radical conjugado: $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\times\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\infty}=0$$

Ejemplo 33. Hallar $\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+3})$

Solución: $\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+3})$ = - ∞ + ∞=?

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+3})=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2+3})(x-\sqrt{x^2+3})}{(x-\sqrt{x^2+3})}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-3}{(x-\sqrt{x^2+3})}=\frac{-3}{-\infty-\sqrt{(-\infty)^2+3}}=\frac{-3}{-\infty-\infty}=0$$

Se venció la indeterminación multiplicando por la conjugada

Ejemplo 34. Hallar $\lim_{x\to-\infty}(3x+\sqrt{9x^2-x})$

Solución: $\lim_{x\to-\infty}(3x+\sqrt{9x^2-x})=-\infty+\sqrt{\infty+\infty}$ = - ∞ + ∞= ?

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}(3x+\sqrt{9x^2-x})=\lim_{x\to-\infty}\frac{(3x+\sqrt{9x^2-x})(3x-\sqrt{9x^2-x})}{(3x-\sqrt{9x^2-x})}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2-9x^2+x}{3x-\sqrt{9x^2-x}}=\frac{-\infty}{-\infty}=in\det erminado \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{3x}{x}-\frac{\sqrt{9x^2-x}}{-\sqrt{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3+\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3+\sqrt{9-\frac{1}{x}}}=\frac{1}{3+\sqrt{9-\frac{1}{-\infty}}}=\frac{1}{3+\sqrt{9+0}}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

Ejemplo 35. Hallar $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4}-x)$

Solución: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4}-x)$ = ∞ - ∞ =?

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4}-x)(\sqrt{x^2+4}+x)}{(\sqrt{x^2+4}+x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x}=\frac{4}{\sqrt{\infty^2+4}+\infty}=\frac{4}{\infty+\infty}=\frac{4}{\infty}=0$$

Ejemplo 36. Hallar $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+5x-6}}$

Solución: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+5x-6}}=-\dfrac{\infty}{\infty}=?$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+5x-6}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+5x-6}}{-\sqrt{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}}}=\frac{2+\frac{3}{-\infty}}{-\sqrt{1+\frac{5}{-\infty}-\frac{6}{(-\infty)^2}}}=\frac{2+0}{-\sqrt{1+0-0}}=-2$$

Ejemplo 37. Hallar $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+x})$

Solución: $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+x})=\infty-\infty=?\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+x})$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-x}{\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)}=\frac{-\infty}{\infty}=?$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x^2+x}}{+\sqrt{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}} = \frac{-1}{1+\sqrt{1+0}} = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo 38. Hallar $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3+1})$

Solución: $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3+1}) = \sqrt[3]{-\infty-\infty} - \sqrt[3]{-\infty+1} = -\infty + \infty = ?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3+1})(\sqrt[3]{(x^3+x)^2} + \sqrt[3]{(x^3+x)(x^3+1)} + \sqrt[3]{(x^3+1)^2})}{(\sqrt[3]{(x^3+x)^2} + \sqrt[3]{(x^3+x)(x^3+1)} + \sqrt[3]{(x^3+1)^2})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}^3 + x - \cancel{x}^3 - 1}{(\sqrt[3]{(x^3+x)^2} + \sqrt[3]{(x^3+x)(x^3+1)} + \sqrt[3]{(x^3+1)^2})} = \frac{-\infty}{+\infty+\infty+\infty} = ?$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\frac{(x^3+x)^2}{x^6}} + \sqrt[3]{\frac{(x^3+x)(x^3+1)}{x^6}} + \sqrt[3]{\frac{(x^3+1)^2}{x^6}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\frac{x^6}{x^6}+\frac{2x^4}{x^6}+\frac{x^2}{x^6}} + \sqrt[3]{\frac{x^6}{x^6}+\frac{x^3}{x^6}+\frac{x^4}{x^6}+\frac{x}{x^6}} + \sqrt[3]{\frac{x^6}{x^6}+\frac{2x^3}{x^6}+\frac{1}{x^6}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}} + \sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^6}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{-\infty} - \frac{1}{\infty}}{\sqrt[3]{1+0+0} + \sqrt[3]{1+0+0+0} + \sqrt[3]{1+0+0}} = \frac{0}{3} = 0$$

https://www.youtube.com/watch?v=4zpM-5GJEzU&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=VrxD03mlIZk&feature=emb_logo

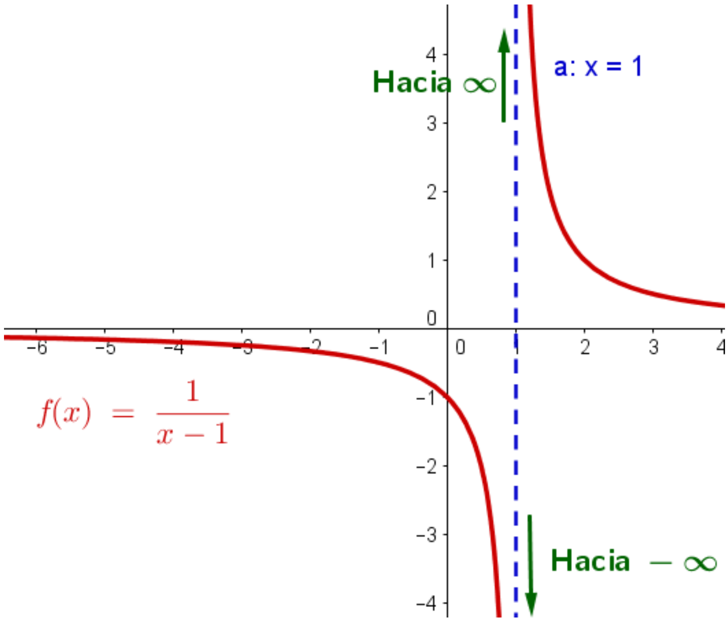
<u>3.8.1. DEFINICIÓN DE ASÍNTOTA VERTICAL</u>: Si f(x) tiende a $+\infty$ ò $-\infty$, cuando "x" tiende a "c" por la izquierda ô por la derecha, diremos que la recta x = c es una asíntota vertical de la función $f(x)$ y se representa como una línea recta paralela al eje "y" y cruza al eje "x" en "c".

Ejemplo 39. (Limites infinitos, por un lado).

Hallar $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1}$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1}$

Solución: $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1^+-1} = \frac{1}{1{,}0000\ldots1-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1^- - 1} = \frac{1}{0{,}999\ldots - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

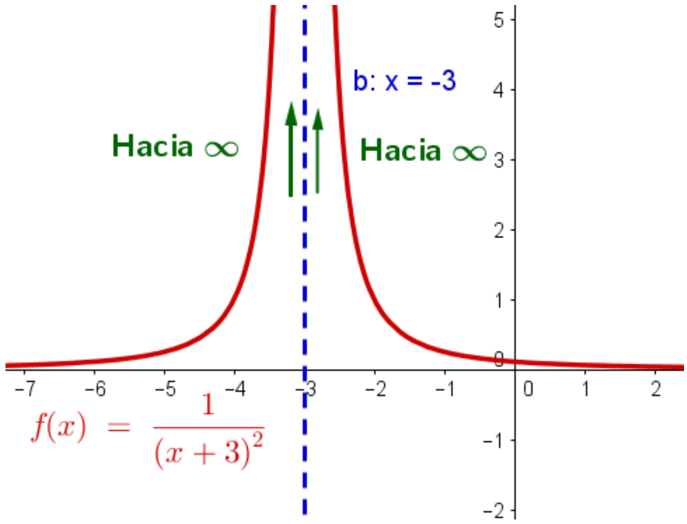


Ejemplo 40. (Limites infinitos, por ambos lados iguales)

Hallar $\lim\limits_{x \to -3^+} \frac{1}{(x+3)^2}$ y $\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{1}{(x+3)^2}$

Solución: $\lim\limits_{x \to -3^+} \frac{1}{(x+3)^2} = \frac{1}{(-3^+ +3)^2} = \frac{1}{(-2{,}999\ldots+3)^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{1}{(x+3)^2} = \frac{1}{(-3^- + 3)^2} = \frac{1}{(-3{,}00000\ldots1 + 3)^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



Ejemplo 41. Encontrar las asíntotas verticales y horizontales de la función.

$f(x)=\frac{x}{x^2+x-2}$. y trazar la gráfica de f.

Solución: $f(x)=\frac{x}{x^2+x-2}=\frac{x}{(x-1)(x+2)}$

Las asíntotas verticales ocurren cuando el denominador es 0, esto es, cuando x=1 y cuando x= -2. De esta manera:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1^+}{(1^+-1)(1^++2)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1^+}{(0^+)(3^+)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1^+}{(0^+)}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1^-}{(1^--1)(1^-+2)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1^-}{(0^-)(3^-)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1^-}{(0^-)}=-\infty$$

Ahora:

$\lim_{x\to -2^-}\frac{x}{(x-1)(x+2)}=-\infty$. Y de igual forma: $\lim_{x\to -2^+}\frac{x}{(x-1)(x+2)}=+\infty$

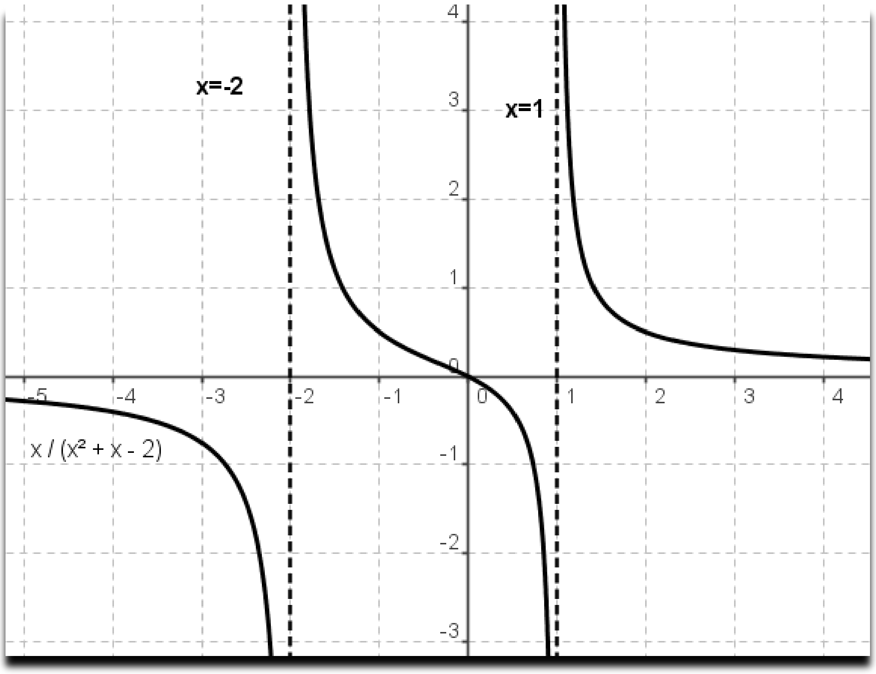
Así que las asíntotas verticales son x=1 y x=-2

Ahora hallemos las asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+x-2}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty^2}}=\frac{0}{1+0-0}=0.$$

La asíntota horizontal es y=0. Un cálculo semejante muestra que $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+x-2}=0$

La gráfica sería la siguiente:



Ejemplo 42. Encontrar las asíntotas horizontales y verticales de la función $f(x)=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$ Y grafique.

Solución: Hallemos las Asíntotas verticales: Habrán asíntotas verticales donde el denominador se hace "0" y no se simplifica; 3x-5=0, por lo tanto x=5/3 será asíntota vertical.

Hallemos las Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\frac{\infty}{\infty}=?\ (\text{indeterminado})$.

Dividiendo numerador y denominador entre x, y utilizando las propiedades de los límites, tenemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}{\frac{3x}{x}-\frac{5}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{+\sqrt{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{+\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{+\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}==\frac{\sqrt{2+0}}{3-5.0}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

(Puesto que $\sqrt{x^2}=+x$ para x >0)

Recordemos: $\sqrt{|f(x)|^2} = |f(x)| = \begin{cases} + f(x), \text{ si } f(x) \geq 0 \\ - f(x), \text{ si } f(x) < 0 \end{cases}$

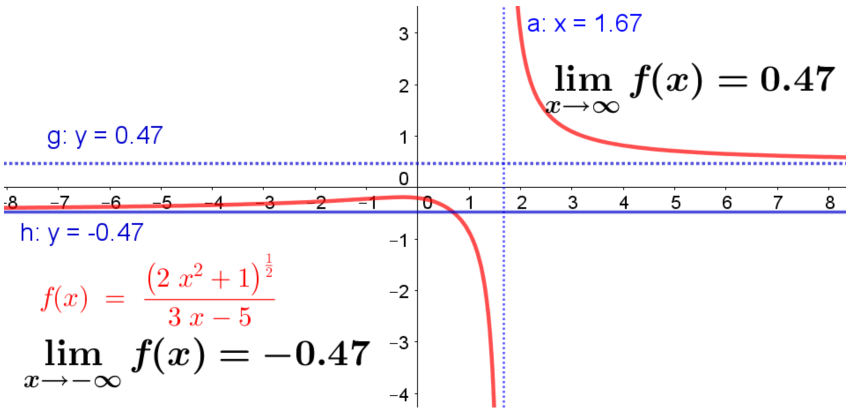
Por lo tanto, la recta y= $\frac{\sqrt{2}}{3}$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

Al calcular el límite cuando $x \to -\infty$, debemos recordar que para x<0, tenemos $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, así que al dividir el numerador entre x, cuando x<0, obtenemos:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{-x}}{\frac{3x}{x}-\frac{5}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} == \frac{-\sqrt{2+0}}{3-5.0} = \frac{-\sqrt{2}}{3}$$

Por consiguiente, la recta y = - $\frac{\sqrt{2}}{3}$ también es una asíntota horizontal de la gráfica siguiente:



https://www.youtube.com/watch?v=XgymhQIOigE

<u>Ejemplo 43.</u> Encuentre las asíntotas horizontales y verticales de la función dada, y trace la gráfica: g (x) $= \frac{x^2}{4-x^2}$

Solución: g (x) $= \frac{x^2}{4-x^2} = \frac{x^2}{(2-x)(2+x)}$

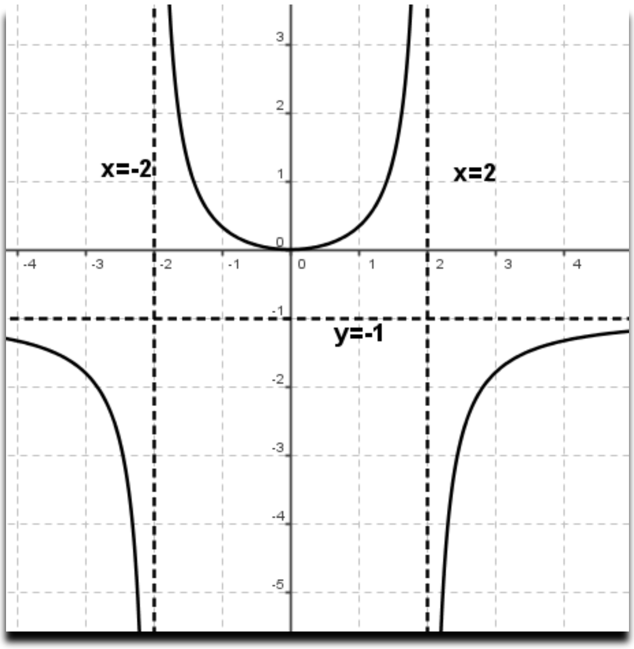
x = 2 x =-2 asíntotas verticales

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = \frac{\infty}{-\infty} = ? \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{4}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{4}{x^2}-1} = \frac{1}{\frac{4}{\infty^2}-1} = \frac{1}{0-1} = -1$$ ⇒ y = -1 ⇒ asíntota horizontal

De igual forma: $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = -1$

X	-3	-1	0	1	3
Y	-1.8	0.3	0	0.3	-1.8



Ejemplo 44. Encuentre las asíntotas horizontales y verticales de la función dada: f (x) $= \frac{4-3x}{x+1}$

Solución: x =-1 ← asíntotas vertical

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4-3x}{x+1} = \frac{-\infty}{\infty} = ? \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{4-3x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x}-\frac{3x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x}-3}{1+\frac{1}{x}} = \frac{\frac{4}{\infty}-3}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{0-3}{1+0} = -3$$ → y =-3 → asíntota horizontal

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4-3x}{x+1}=\frac{\infty}{-\infty}=? \Rightarrow \; = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4}{x}-\frac{3x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4}{x}-3}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{4}{-\infty}-3}{1+\frac{1}{-\infty}}=-3$$

<u>Ejemplo 45</u>. Sea $y^2 = \dfrac{2x^3}{x^3+1}$ hallar asíntotas horizontales, verticales; graficar.

Solución: $y = \pm\sqrt{\dfrac{2x^3}{(x+1)(x^2-x+1)}}$

x = -1 asíntota vertical.

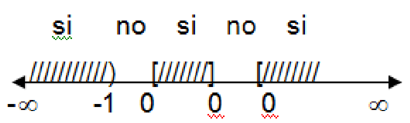
$$\lim_{x\to\pm\infty} \pm\sqrt{\frac{2x^3}{x^3+1}} = \pm\sqrt{\frac{\infty}{\infty}} = ? \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \pm\sqrt{\frac{2x^3}{x^3+1}} =$$

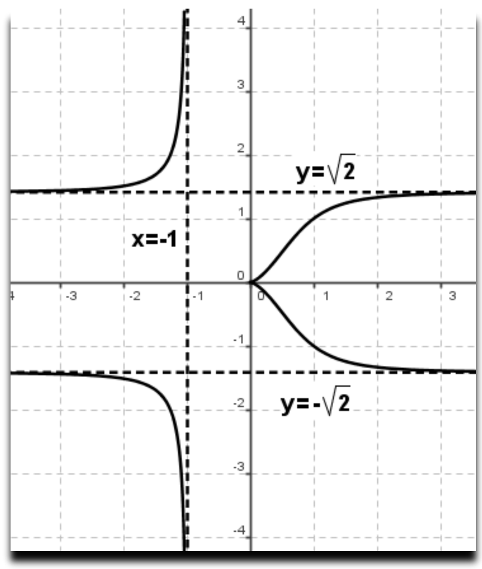
$$\lim_{x\to\pm\infty} \pm\sqrt{\frac{\frac{2x^3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \pm\sqrt{\frac{2}{1+\frac{1}{x^3}}} = \pm\sqrt{\frac{2}{1+\frac{1}{\infty^3}}} = \pm\sqrt{\frac{2}{1+0}} = \pm\sqrt{2} \to y = \pm\sqrt{2}$$

Asíntotas horizontales

x = 0

$$\frac{2x^3}{x^3+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x^3}{(x+1)(x^2-x+1)} \geq 0$$ (a) **Supongamos**: x = 1 en (a) $\dfrac{(+)}{(+)(+)} \geq 0$ si





X	-2	0
y	$\pm\sqrt{\frac{16}{7}} = \pm 1.51$	0

Ejemplo 46. Sea y= $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$ Hallar asíntotas horizontales, verticales; y graficar.

Solución: $x^2 - 4 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq \pm 2 \;\Rightarrow\; x = \pm 2$ asíntotas verticales

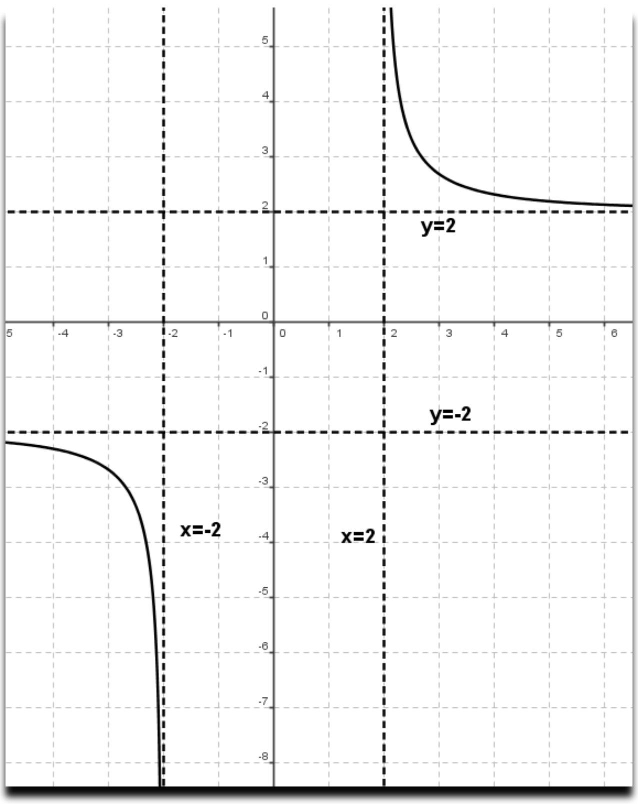
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{\infty}{\infty} = ?;\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{2x}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\pm\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{\pm\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{4}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{\pm\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}} = \frac{2}{\pm\sqrt{1-\dfrac{4}{\infty}}} = \frac{2}{\pm\sqrt{1-0}} = \pm 2$$

$y = \pm 2 \rightarrow$ asíntotas horizontales

x	3	-3	0	1	
y	$\frac{6}{\sqrt{5}}$	$\frac{-6}{\sqrt{5}}$	?	?	?

3, . . . –3, ...



Ejemplo 47. Dado: **1.** $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-x-12}{x+3}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$

a. Hallar $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ **b.** Dado y= *f* (x)

b.i. Hallar dominio, asíntotas verticales (A.V.), puntos de discontinuidad, Asíntotas horizontales (A.H.), Asíntotas oblicuas (A.O)

b.ii. Bosqueje una gráfica aproximada hallando límites laterales en las A.V., y tipo de discontinuidad.

Solución 1: a. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - x - 12}{x+3} = \dfrac{9+3-12}{-3+3} = \dfrac{0}{0} = ?$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - x - 12}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x-4)(x+3)}{(x+3)} = \lim\limits_{x \to -3} (x-4) = -3-4 = -7$

b. i. f (x)= $\dfrac{x^2 - x - 12}{x+3} = \dfrac{(x-4)(x+3)}{(x+3)}$ = x-4

$\Rightarrow y = x - 4$ *es una línea recta con un punto de discontinuidad*

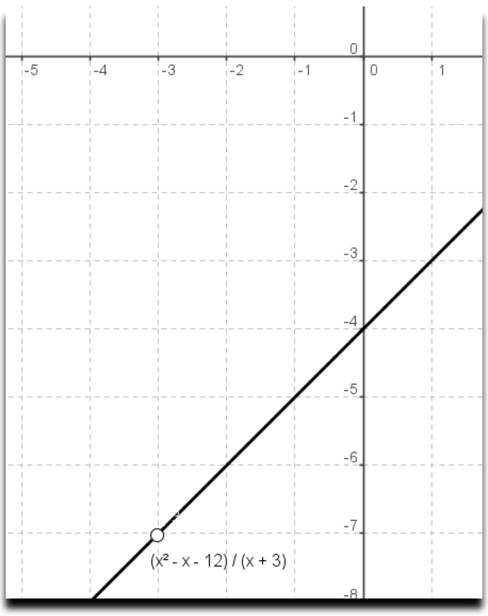
x≠-3

D= $\{x / x \neq -3\}$ en x= -3 hay punto de discontinuidad. P_D (-3,-7)

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x-4) = \pm\infty - 4 = \pm\infty \Rightarrow$ No hay A.H.

b.ii.

x	-3	0	2
y	-7	-4	-2



Solución 2:

a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \dfrac{1-1}{1-1} = \dfrac{0}{0} = ? \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1+1+1}{1+1} = 3/2$

b. i. $f(x)= \dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

x ≠ 1 x ≠ -1 ⇒ Pto. de discontinuidad $P_{D_o}(1, 3/2)$ x = -1 A.V.

$P_d\left(1,\frac{3}{2}\right) \quad y \quad x=-1\ A.V.$

Obsérvese que al simplificar la función, el grado del numerador quedo uno mayor que el grado del denominador, por lo tanto hay una asíntota oblicua; y se halla dividiendo el numerador entre el denominador, y al cociente se le antepone y=, y nos resultaría la asíntota oblicua:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^2}+\cancel{x}+1 & x+1 \\ \hline \cancel{-x^2}\cancel{-x} & x \\ \hline 1 & \end{array}$$

por lo tanto y=x es la asíntota oblicua

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(\pm\infty)^3-1}{(\pm\infty)^2-1}=\frac{\pm\infty}{\infty}=?\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{\pm\infty-\frac{1}{(\pm\infty)^2}}{1-\frac{1}{(\pm\infty)^2}}=\frac{\pm\infty-0}{1-0}=\pm\infty$$

⇒ No hay A.H.

b.ii.

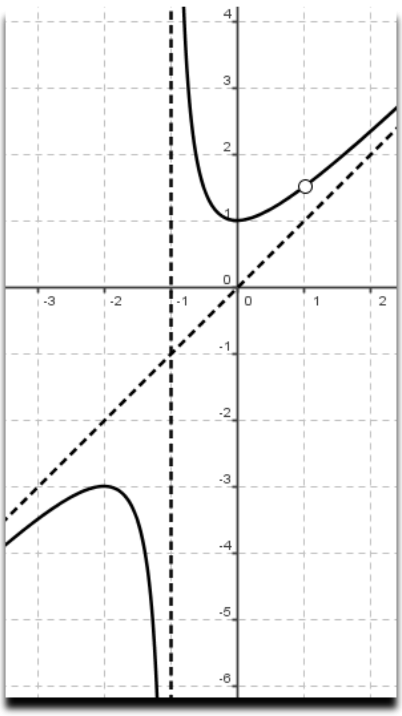
$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{1-1+1}{-1^++1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{1-1+1}{-1^-+1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

x	0	-2	-3
y	1	-3	-28/8

⇓

-3.5



Solución 3:

a. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4} = \dfrac{4+2-6}{4-4} = \dfrac{0}{0} = ?$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+3}{x+2} = \dfrac{2+3}{2+2} = \dfrac{5}{4}$

b.i. (x-2) $\neq$0 $\Rightarrow$ x $\neq$ +2; (x+2) $\neq$0 $\Rightarrow$ x $\neq$ -2; $\Rightarrow$ D = $\{$x/x $\neq\pm$ 2$\}$

f(x)= $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4} = \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$ Pto.de discontinuidad: $P_{D_O}(2, 5/4)$

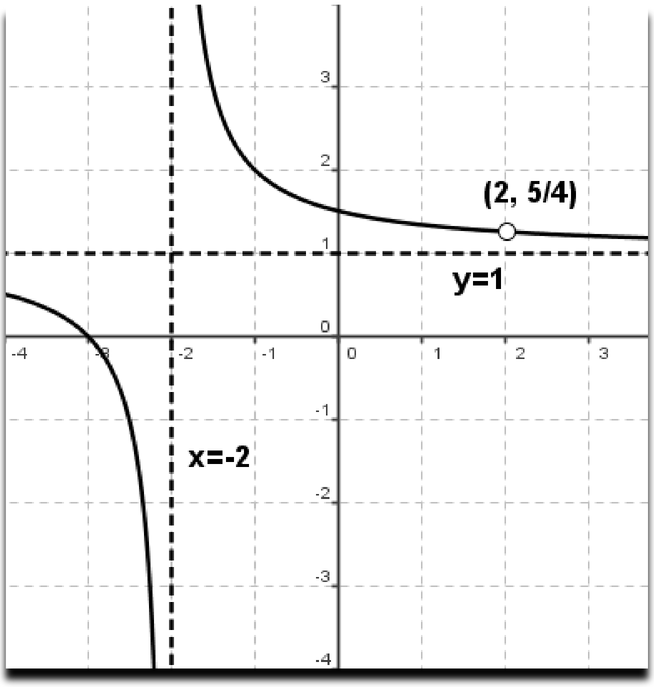
x=-2: A.V.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x+3}{x+2} = \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty} = ? \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}} = \dfrac{1+\frac{3}{\pm\infty}}{1+\frac{2}{\pm\infty}} = \dfrac{1\pm 0}{1\pm 0} = 1$ $\Rightarrow$ y = 1 A.H.

b.ii. $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x+3}{x+2} = \dfrac{-2+3}{-2^+ +2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x+3}{x+2} = \dfrac{-2+3}{-2^- +2} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

x	-1	-3
y	2	0



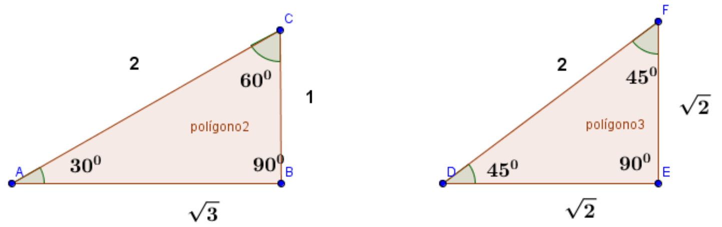
https://www.youtube.com/watch?v=3CPQyEH_q0E&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=Lb60OeX04mk&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=Pnj0AGwhRzI&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=jglErfzqFgw&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=MLGM1mhyYoI&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=yfW8BljpJ4E&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=OSvh9Kx9Q1s&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=-KDrNRl8Jow&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=rkseob-vYkg&feature=emb_logo

3.9. LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

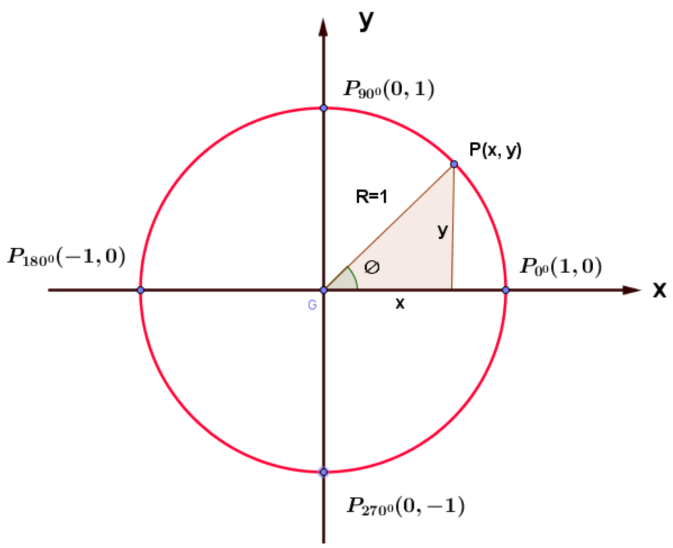
1. $\lim\limits_{\emptyset \to 0} \frac{sen(\emptyset)}{\emptyset} = 1$

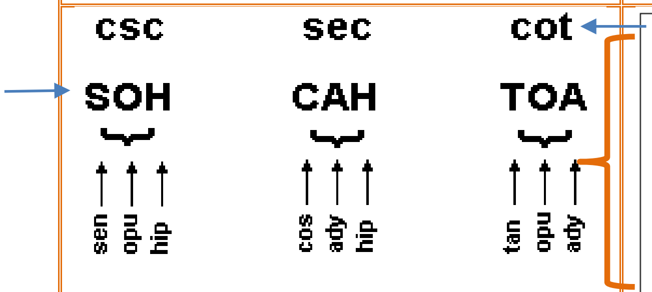
2. $\lim\limits_{\emptyset \to 0} \frac{1-cos(\emptyset)}{\emptyset} = 0$



$$\text{sen}\emptyset = y$$
$$\text{cos}\emptyset = x$$
$$\text{tan}\emptyset = \frac{y}{x}$$
$$\text{cot}\emptyset = \frac{x}{y}$$
$$\text{sec}\emptyset = \frac{1}{x}$$
$$\text{csc}\emptyset = \frac{1}{y}$$

Circulo unitario





$$Seno = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad Co\,sen\,o = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$Tangente = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \qquad Cotangente = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

$$Secante = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} \qquad Co\sec ante = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

Para realizar los límites de funciones trigonométricas, se usarán dos teoremas de los límites, los cuales veremos su aplicación mediante unos ejemplos:

- ✓ $\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{Sen}\theta}{\theta} = 1$ (θ en radianes)
- ✓ $\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\operatorname{Cos}\theta}{\theta} = 0$ (θ en radianes)

Ejemplo 48. Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{sen2x}{5x} = \frac{1}{5} \lim_{2x\to 0} \frac{2.sen2x}{2x} = \frac{1}{5} * 2 * \lim_{2x\to 0} \frac{sen2x}{2x} = \frac{1}{5} * 2 * 1 = \frac{2}{5}$

Ejemplo 49. Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{tan2x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen2x}{5x}}{\frac{cos2x}{1}} = \lim_{2x\to 0} \frac{\frac{2}{5}}{cos0} = \frac{2}{5}$

Ejemplo 50. Hallar $\lim_{x\to\infty} x.\, tan\frac{1}{x}$

Solución: $\lim_{x\to\infty} x.tan\frac{1}{x} = \infty.tan\frac{1}{\infty} = \infty.(\to 0) = ?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} x.\tan\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} x.\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\cos\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to\infty \\ \frac{1}{x}\to 0}} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.\frac{1}{\cos\frac{1}{x}} = 1_x 1 = 1$$

Ejemplo 51. Hallar $\lim_{x\to+\infty} x.\operatorname{sen}\frac{1}{x}$

Solución: $\lim_{x\to\infty} x.\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \infty.\operatorname{sen}\frac{1}{\infty} = \infty.\operatorname{sen}0^{-} = \infty.(\to 0) = ?$

$$x \Rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} \to \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x.\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{\frac{1}{x}\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

Ejemplo 52. Hallar $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}2x}$

Solución: $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}2x} = \frac{0}{0} = ? \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x.\frac{\operatorname{sen}3x}{3x}}{2x.\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}} = \frac{3_x 1}{2_x 1} = \frac{3}{2}$

Ejemplo 53. Hallar $\lim_{x \to \pi/4} \dfrac{1-tanx}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

Solución: $\lim_{x \to \pi/4} \dfrac{1-tanx}{\operatorname{sen} x - \cos x} = \dfrac{1-tan45}{\operatorname{sen} 45 - \cos 45} = \dfrac{1-1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{0}{0} = ?$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \pi/4} \frac{1-tanx}{\operatorname{sen} x - \cos x} = \lim_{x \to \pi/4} \frac{1-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\operatorname{sen} x - \cos x} = \lim_{x \to \pi/4} \frac{\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1}}$$

$$= \lim_{x \to \pi/4} \frac{\frac{-(\operatorname{sen} x - \cos x)}{\cos x}}{\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1}} = \lim_{x \to \pi/4} -\frac{1}{\cos x} = \frac{-1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

Ejemplo 54. Hallar $\lim_{x \to 0} \dfrac{tan^2 x}{x}$

Solución: $\lim_{x \to 0} \dfrac{tan^2 x}{x} = \dfrac{tan^2 0}{0} = \dfrac{0}{0} = ?$

$$\lim_{x \to 0} \frac{tan^2 x}{x} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.tanx}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} . \frac{tanx}{\cos x} = 1.\frac{tan0}{\cos 0} = 1.\frac{0}{1} = 0$$

TENER EN CUENTA:

Indeterminaciones:	***Hay que mirar:***
$(a)\ Si\ \lim_{x \to a \in R} f(x) = \frac{0}{0} = ?$	(i) Factorizar y simplificar (ii) Multiplicar por la conjugada (iii) Límites trigonométricos
$(b)\ Si\ \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{\pm\infty}{\pm\infty} = ?$ $(c)\ Si\ \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty - \infty = ?$	(i) Divido cada término por "x" elevada a la mayor potencia del denominador. (ii) Multiplicar por la conjugada

Para multiplicar por la conjugada:	
(i)	Si tengo $\sqrt{\ } \to (a+b).(a-b) = a^2 - b^2$
(ii)	Si tengo $\sqrt[3]{\ } \to (a \pm b).(a^2 \mp a.b + b^2) = a^3 \pm b^3$

https://www.youtube.com/watch?time_continue=1&v=wC9XfzFYc5s&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=G-zcxcQeLHc&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?time_continue=1&v=G-zcxcQeLHc&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=1COcHozan-A
https://www.youtube.com/watch?v=zLaXdRUkQPc&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?time_continue=1&v=zLaXdRUkQPc&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=Go1Keag9748&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=h8I-kcdV9r0&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=nUls5W34ZQc&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=mE7TUJJLBCQ&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=xouLQ0wVwrU&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=f-Kvt4fV_Zg&feature=emb_logo
https://www.youtube.com/watch?v=70kwuU45_6c&feature=emb_logo

3.10. EJERCICIOS PROPUESTOS

En los ejercicios 1-4 analizar las formulas A, B, C;

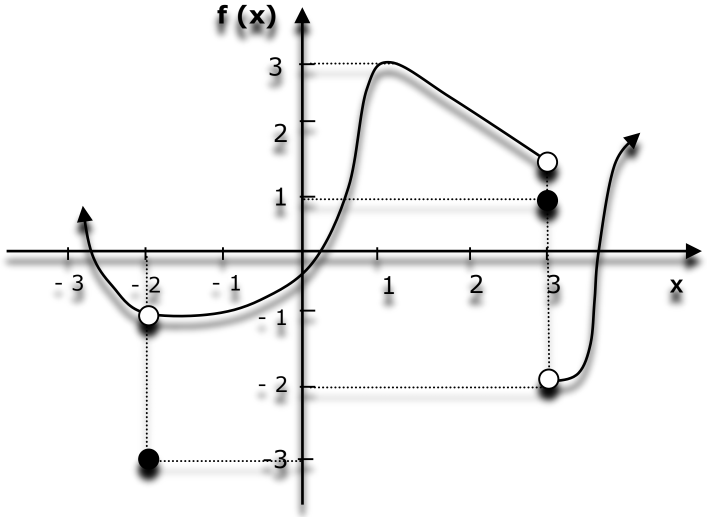
Cuál es $f(x) = \begin{cases} ---- \\ ---- \\ ---- \end{cases}$; remover la discontinuidad.

Ejemplo 1. Para función f, cuya gráfica se proporciona, determine el valor de la cantidad indicada, si existe.

a. $\lim_{x \to 1} f(x)$ **b.** $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ **c.** $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

d. $\lim_{x \to 3} f(x)$ **e.** $f(3)$ **f.** $\lim_{x \to -2^-} f(x)$

g. $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ **h.** $\lim_{x \to -2} f(x)$ **i.** $f(-2)$



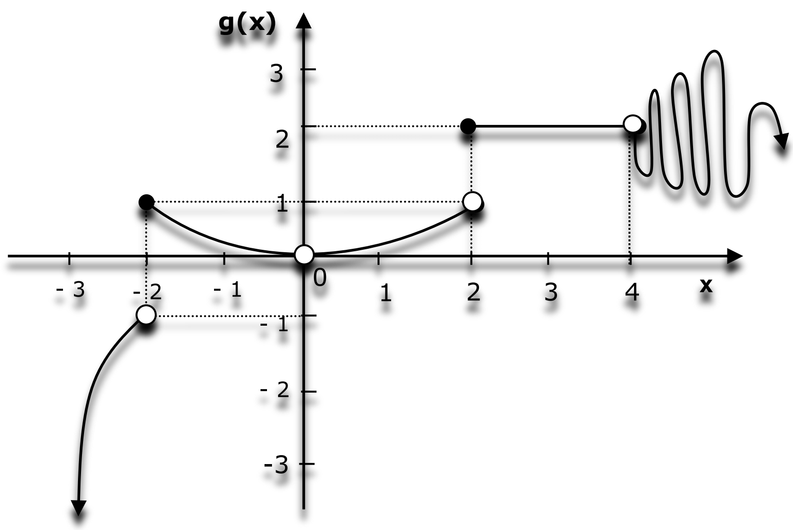
Ejemplo 2. Para la función g, cuya gráfica se proporciona, determine el valor de la cantidad indicada, si existe.

a. $\lim_{x \to -2^-} g(x)$ **b.** $\lim_{x \to -2^+} g(x)$ **c.** $\lim_{x \to -2} g(x)$

d. g(-2) **e.** $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ **f.** $\lim_{x \to 2^+} g(x)$

g. $\lim_{x \to 2} g(x)$ **h.** g(2) **i.** $\lim_{x \to 4^+} g(x)$

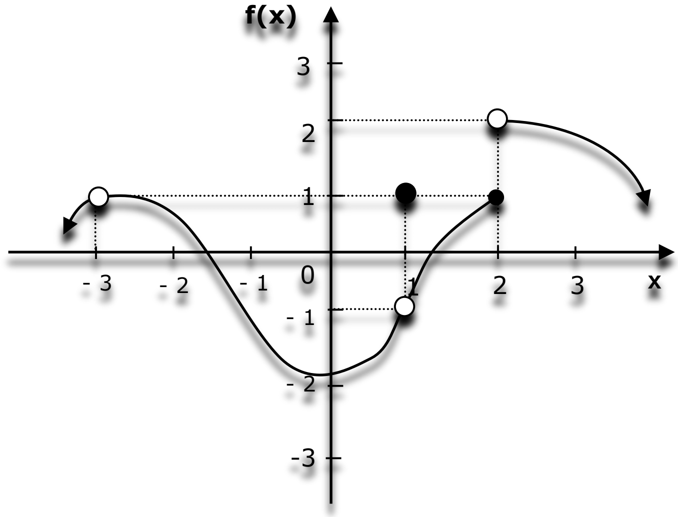
j. $\lim_{x \to 4^-} g(x)$ **k.**g(0) **l.** $\lim_{x \to 0} g(x)$



Ejemplo 3. Determine el valor del límite, si existe, a partir de la gráfica dada.

a. $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **b.** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ **c.** $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

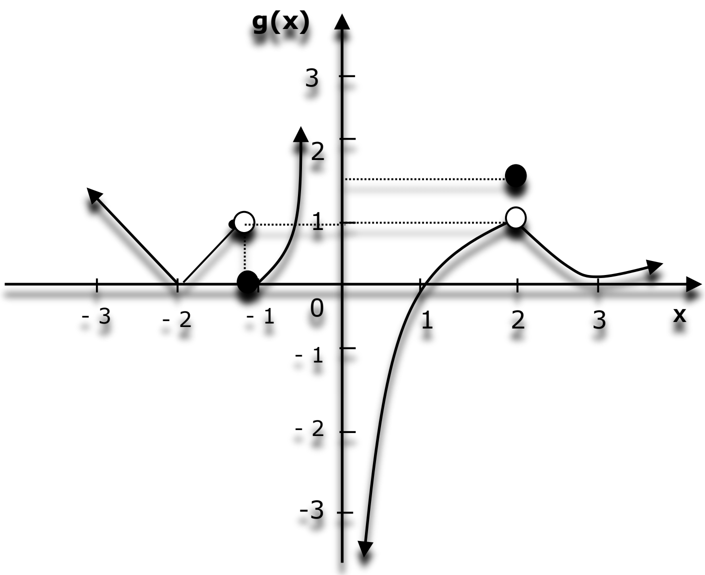
d. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ **e.** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ **f.** $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$



Ejemplo 4. Determine el valor del límite, si existe, a partir de la gráfica dada.

a. $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ **b.** $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ **c.** $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

d. $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$ **e.** $\lim\limits_{x \to -1^-} g(x)$ **f.** $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$



Calcule el límite dado en los ejercicios.

Ejemplo 5. $\lim\limits_{x \to 4} (5x^2-2x+3)$ **Ejemplo 6.** $\lim\limits_{x \to 2} (x^2+1)(x^2+4x)$

Ejemplo 7. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x-2}{x^2+4x-3}$ **Ejemplo 8.** $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{x^3+2x+7}$

En los ejercicios 9-22: **1.** Hallar el límite indicado

2. Dado y = f(x)

2.1. Hallar dominio, puntos de discontinuidad, Asíntotas

2.2. Grafique hallando los límites laterales en las A.V. Tipo de discontinuidad.

Ejemplo 9. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2-x-12}{x+3}$ **Ejemplo 10.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+x^2}{x}$

Ejemplo 11. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x+1}$ **Ejemplo 12.** $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^3-t}{t^2-1}$

Ejemplo 13. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(h-5)^2-25}{h}$ **Ejemplo 14.** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^4-1}{h}$

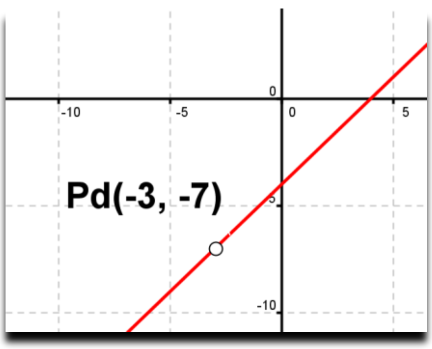
Ejemplo 15. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^2-x-6}$ **Ejemplo 16.** $\lim\limits_{x \to -2} \left[\dfrac{x^2}{x+2}+\dfrac{2x}{x+2}\right]$

Ejemplo 17: $\lim\limits_{t \to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$ **Ejemplo 18.** $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{2-t}-\sqrt{2}}{t}$

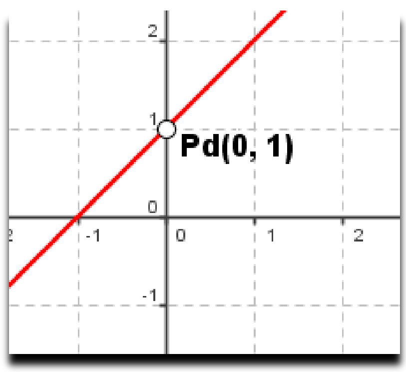
Ejemplo 19. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$ **Ejemplo 20.** $\lim\limits_{t \to 0} \left[\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}-\dfrac{1}{t}\right]$

Ejemplo 21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$ **Ejemplo 22.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3-18x}{x^3-4x}$

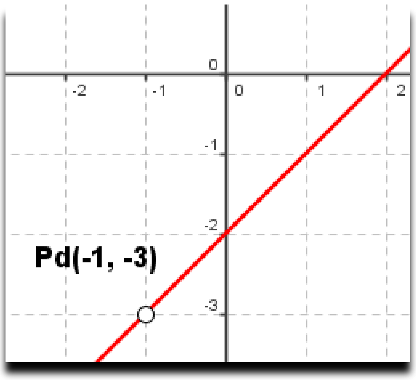
Solución 9:



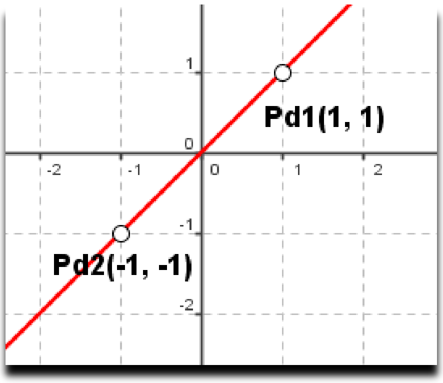
Solución 10:



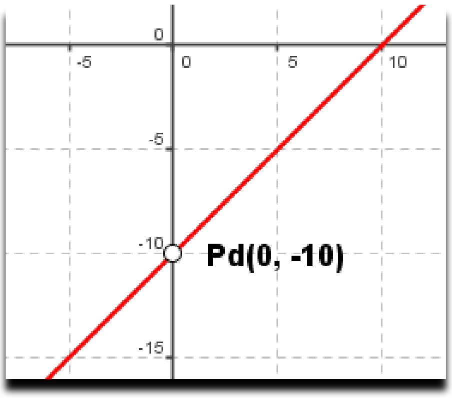
Solución 11:



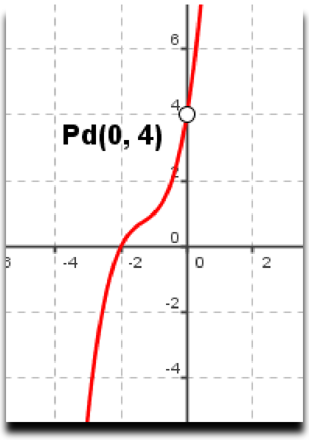
Solución 12:



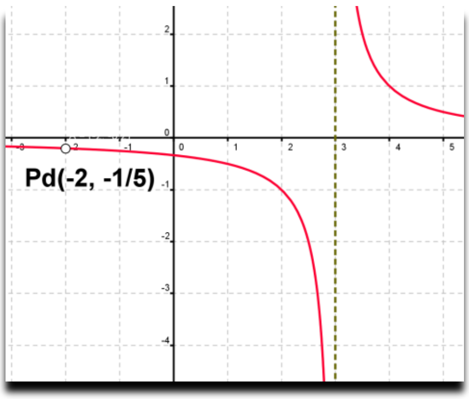
Solución 13:



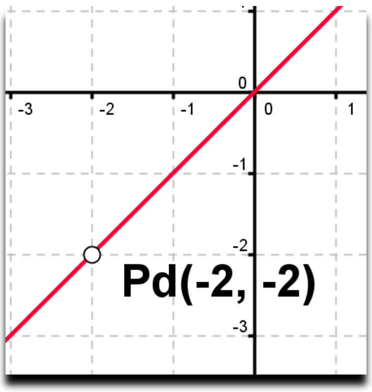
Solución 14:



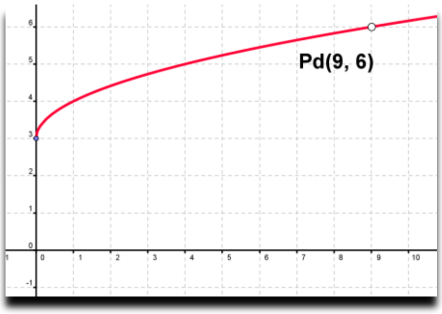
Solución 15:



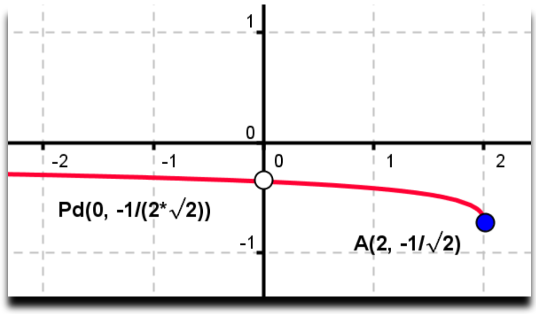
Solución 16:



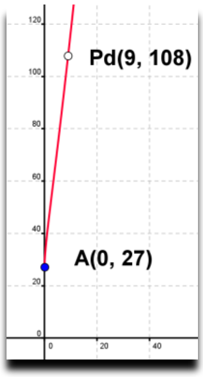
Solución 17:



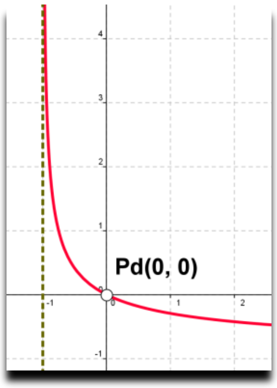
Solución 18:



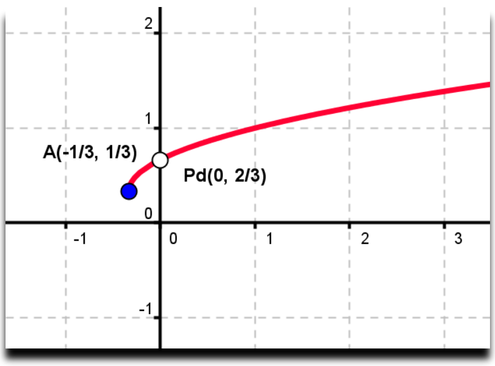
Solución 19:



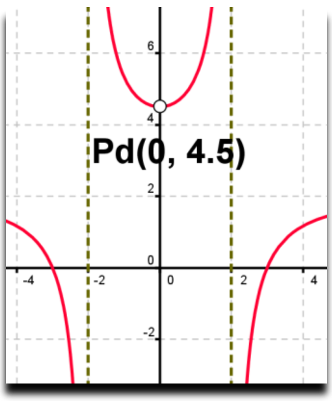
Solución 20:



Solución 21:



Solución 22:



En los ejercicios 23-26: Dado y = f(x)

1. Hallar dominio, puntos de discontinuidad, Asíntotas

2. Grafique hallando los limites laterales en las A.V. Tipo de discontinuidad.

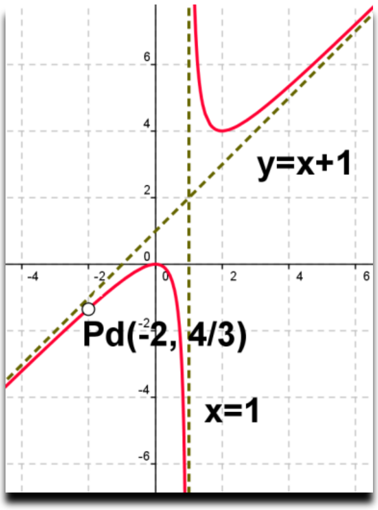
Ejemplo 23. $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2+x-2}$ Ejemplo 24. $f(x) = \frac{2x^2-8}{x^2+x-6}$

https://www.youtube.com/watch?v=3CPQyEH_q0E

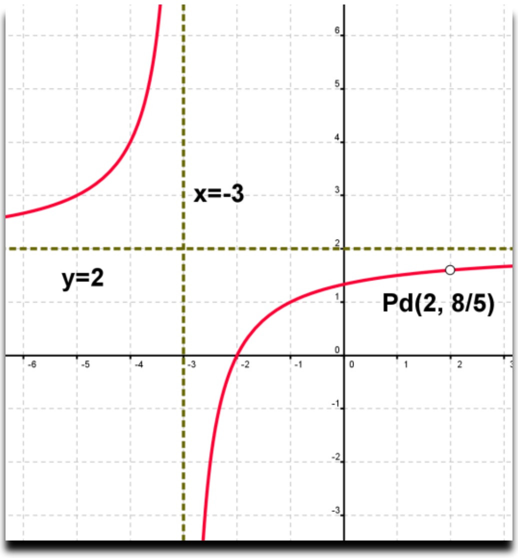
Ejemplo 25. $f(x) = \frac{-x^3+2x^2+8x}{x^2-9}$ Ejemplo 26. $f(x) = \frac{-2x^2+5}{x^2-1}$

https://www.youtube.com/watch?v=Lb60OeX04mk

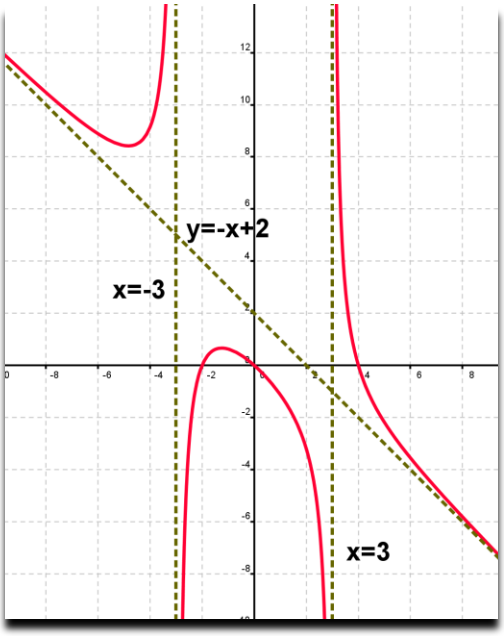
Solución 23:



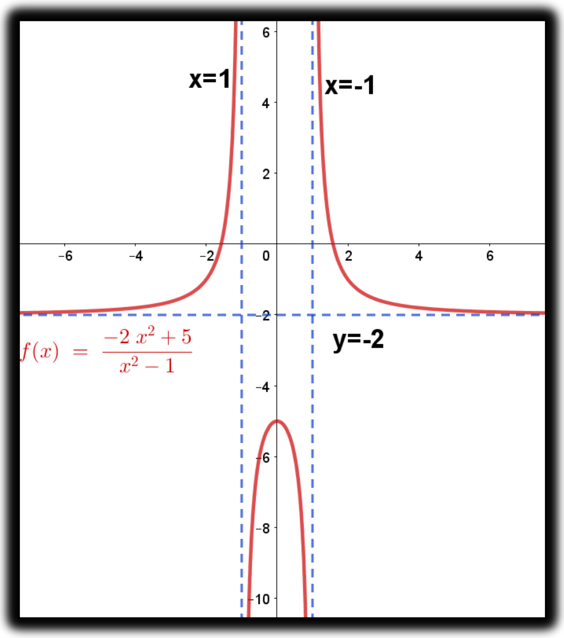
Solución 24:



Solución 25:



Solución 26:



En los ejercicios 27-38 analizar continuidad y graficar

Ejemplo 27. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x+2 & \text{si } x < 1 \\ 3 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Ejemplo 28: $g(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x < -1 \\ (x+2)^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Ejemplo 29: $h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 8 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Ejemplo 30: $f(x)= \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

Ejemplo 31: $f(x)= \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x < 0 \\ (x+1)^3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Ejemplo 32: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Ejemplo 33: $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1/x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Ejemplo 34: $f(x)= \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Ejemplo 35: $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{para} \quad x < 3 \\ 5 - x & \text{para} \quad x \geq 3 \end{cases}$

Ejemplo 36: $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Ejemplo 37: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ 3 - x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ (x-3)^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Ejemplo 38: $g(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x=2 \\ 2x-x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2-x & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ x-4 & \text{si } 3 < x < 4 \\ \pi & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

Ejemplo 39: Determine para qué valor de la constante c la función

$$f(x) = \begin{cases} cx + 1, & \text{si } x \leq 3 \\ cx^2 - 1, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Es continua en $(-\infty, \infty)$

En los ejemplos 40 al 76 evalúe los límites indicados:

Ejemplo 40: *Encontrar* $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$ **Ejemplo 41**: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x}$

https://www.youtube.com/watch?time_continue=389&v=h6zf2MDiQ5U

Ejemplo 42: *Encontrar* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ **Ejemplo 43**: $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x+\sqrt{x}}$ R/ $\sqrt{6}$

https://www.youtube.com/watch?v=sJeMMDjV9vs

Ejemplo 44: *Encontrar* $\lim\limits_{t \to -1} \dfrac{t+1}{t^3-t}$ R/ ½ **Ejemplo 45**: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^2-1}{h}$ R/ 2

https://www.youtube.com/watch?v=mWIQbtZsQ_8

Ejemplo 46: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x^2+3x-2}$ R/ 0 **Ejemplo 47**: $\lim\limits_{s \to 16} \dfrac{4-\sqrt{s}}{s-16}$ R/ - $\dfrac{1}{8}$

Ejemplo 48: $\lim\limits_{x \to 8^-} \dfrac{|x-8|}{x-8}$ R/ -1 **Ejemplo 49**: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ R/ 0

Ejemplo 50: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(1-x)(2+x)}{(1+2x)(2-3x)}$ R/ $\dfrac{1}{6}$ **Ejemplo 51**: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^2-1}{h}$ R/ 2

Ejemplo 52: *Encontrar* $\lim\limits_{r \to \infty} \dfrac{r^4-r^2+1}{r^5+r^3-r}$ R/ 0

https://www.youtube.com/watch?v=5Aj6xF2eJaw

Ejemplo 53: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{4+x}$ R/ 2 y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{4+x}$ R/ - 2

Ejemplo 54: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+8}}{x+2}$ R/ 0 **Ejemplo 55**: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ R/ -1

Ejemplo 56: *Encontrar* $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$ R/ 0

https://www.youtube.com/watch?v=4zpM-5GJEzU

Ejemplo 57: $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{1+x}-\sqrt{x})$ R/ 0

Ejemplo 58: $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+x+1}+x)$ R/- ½ **Ejemplo 59**: $\lim\limits_{x \to \infty}$ cos x R/ No existe

https://www.youtube.com/watch?v=VrxD03mIIZk

Ejemplo 60: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{-2}{(x+1)^6}$ R/ -∞ **Ejemplo 61**: $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{6}{x-5}$ R/ ∞

Ejemplo 62: $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^2}{x+1}$ R/ - ∞

Ejemplo 63: $\lim\limits_{t \to 3^-} \frac{t+3}{t^2-9}$ R/ - ∞

Ejemplo 64: $\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{x^2}{x^2-9}$ R/ ∞

Ejemplo 65: $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{x-1}{x^2(x+2)}$ R/ - ∞

Ejemplo 66: $\lim\limits_{x \to -3^+} \frac{x^3}{x^2+5x+6}$ R/ ∞

Ejemplo 67: $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{-3}{\sqrt[3]{x-2}}$ R/ - ∞

Ejemplo 68: $\lim\limits_{x \to 0^-}$ cot x R/ - ∞

Ejemplo 69: $\lim\limits_{x \to \pi^-}$ csc x R/ ∞

Ejemplo 70: $\lim\limits_{t \to (-3\pi/2)^-}$ sec t R/ ∞

Ejemplo 71: $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x}$ R/ - ∞

Ejemplo 72: $\lim\limits_{x \to \infty}$ (x+ $\sqrt{x}$) R/ ∞

Ejemplo 73: $\lim\limits_{x \to \infty}$ (x^2-x^4) R/ - ∞

Ejemplo 74: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3-1}{x^4+1}$ R/ 0

Ejemplo 75: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ R/ ∞

Ejemplo 76: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^8+3x^4+2}{x^5+x^3}$ R/ - ∞

Encuentre las asíntotas horizontales y verticales:

Ejemplo 77: f(x) = $\frac{1+2x}{2+x}$ R/ y= 2, x= -2

Ejemplo 77 a: f(x) = $\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

Ejemplo 78: h(x) = $\frac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}$ R/ y= ± 1

Ejemplo 79: y= $\frac{x^2+4}{x^2-1}$ R/ x= ± 1 y= 1

Ejemplo 80: y= $\frac{x^3+1}{x^3+x}$ R/ x= 0y= 1

Encuentre los límites indicados:

Ejemplo 81: $\lim\limits_{x \to 0}$ (x^2+cos x) R/ 1

Ejemplo 82: $\lim\limits_{x \to \pi/3}$ (sen x – cos x) R/ $(\sqrt{3}-1)/2$

Ejemplo 83: $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\operatorname{sen} x}{3x}$ R/ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3\pi}$ **Ejemplo 84:** $\lim\limits_{x \to -3\pi} t^3 \operatorname{sen}^4 t$ R/ 0

Ejemplo 85: $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5t}{t}$ R/ 5 https://www.youtube.com/watch?v=wC9XfzFYc5s

Ejemplo 86: $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\cos\theta)}{\sec\theta}$ R/ sen 1 **Ejemplo 87:** $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\tan x}{4x}$ R/ $\dfrac{1}{\pi}$

https://www.youtube.com/watch?v=1COcHozan-A

Ejemplo 88: $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta}$ R/ 0 **Ejemplo 89:** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{3\tan 2x}$ R/ $\dfrac{1}{2}$

Ejemplo 90: $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 3t}{t^2}$ R/ 9 **Ejemplo 91:** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cot 2x}{\csc x}$ R/ $\dfrac{1}{2}$

https://www.youtube.com/watch?v=G-zcxcQeLHc

Ejemplo 92: $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} 2x}$ R/ $\dfrac{1}{2}$ **Ejemplo 93:** $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\ \theta}{\theta + \tan\theta}$ R/ $\dfrac{1}{2}$

Ejemplo 94: $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}.\csc\sqrt{x}$ R/ 1

https://www.youtube.com/watch?v=zLaXdRUkQPc

CAPITULO V: LA DERIVADA Y SUS APLICACIONES

OBJETIVOS

- Dada la ley de movimiento de una partícula, hallar su velocidad instantánea en un tiempo "t", aplicando para ello el concepto de derivada.
- Aplicar las reglas de derivación para hallar las derivadas de funciones algebraicas, trascendentales y trigonométricas.
- Aplicar los métodos de diferenciación en cadena e implícita en la resolución de ejercicios y problemas.
- Dada una función, reconocer el sentido de variación en aquellos intervalos donde es creciente, decreciente, puntos críticos, extremos máximos o mínimos, tanto locales como absolutos, puntos de inflexión, intervalos de concavidad.
- Interpretar geométricamente el concepto de derivada.
- Relacionar el concepto de pendiente como una razón de cambio entre dos variables que se pueden presentar en la vida cotidiana.
- Trazar la gráfica de una función a partir de su: dominio; los puntos de máxima, mínima, inflexión; los puntos de discontinuidad; las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
- Dada una función, calcular el valor de una variable que permita maximizar o minimizar y por lo tanto, resolver un problema sencillo de optimización.
- Hacer del estudiante un mejor crítico con respecto a las variaciones de ciertos fenómenos físicos, sociales, humanísticos, etc.; que le ayudará a resolver diversos problemas que aquejan a la comunidad.
- El estudiante interpretará una curva donde se modelen situaciones sociales para colaborar con su aporte en los cambios fundamentales que requiere el país.

DIAGNOSTICO

1. Simplifique (a) $\sqrt{a^2+b^2}$ (b) $\dfrac{5x^2}{x^{-3}}$ (c) $\dfrac{senx^2}{senx}$

(d) $\dfrac{4a^3-2a}{ab-2a}$ (e) $\dfrac{5}{x^2-a^2}+\dfrac{7}{x+a}-\dfrac{3}{(x-a)^2}$ (f) $(a+b)^2$

2. Simplifique lo máximo: a) $\dfrac{4x^3\left(x^2+1\right)^{1/2}-x^4\left[\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-1/2}(2x)\right]}{\left[\left(x^2+1\right)^{1/2}\right]^2}$

b) $\dfrac{(A-B)^{1/2}.\sqrt[3]{A^2+2AB+B^2}}{\sqrt[3]{\left(A^2-B^2\right)}.(A+B)^{-2/3}}$ c) $\left[\dfrac{x^{-2}+x^{-1}y^{-1}}{x^{-2}-x^{-1}y^{-1}}\right]^{-2}$

d) $\dfrac{(x+1)^{1/2}-x\left[\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}\right]}{\left[(x+1)^{1/2}\right]^2}$

3. Racionalice el numerador y simplifique $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

4. Si un rectángulo tiene una longitud de 3 cm. menor que cuatro veces su anchura, y su perímetro es 19 cm., ¿cuáles son sus dimensiones?

5. Un hombre puede pintar una habitación en 12 h., y otro puede pintar la misma habitación en 10 h. ¿cuánto tiempo les tomará pintar la habitación trabajando juntos?

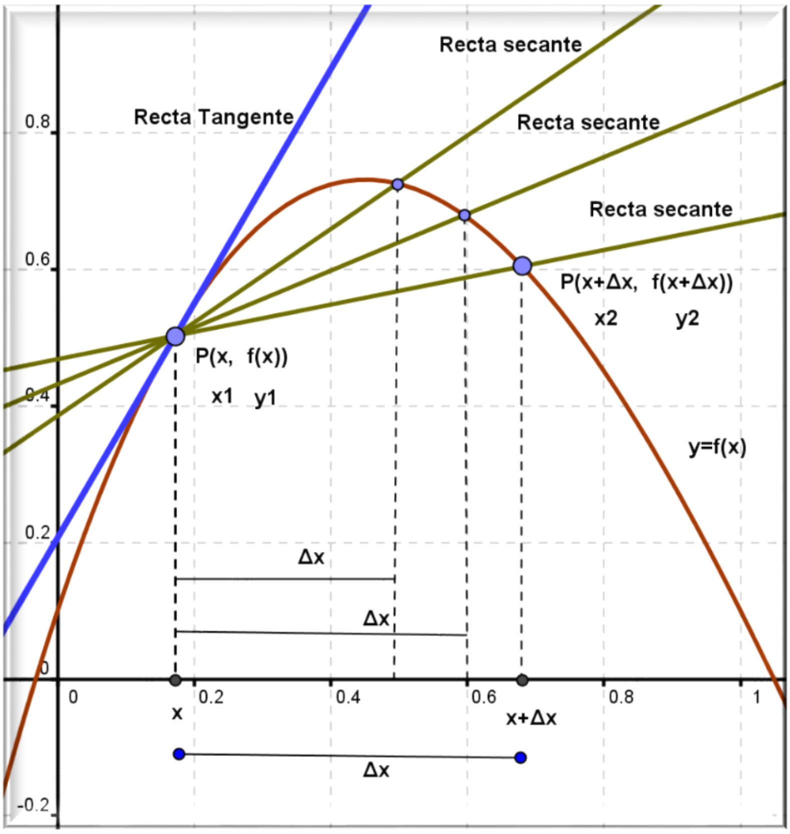
6. Resolver para X: a) 2.lnx – 3.ln2 = lnx + 2.ln3

b) $6+\log x-\log^2 x=0$

7. Resolver para X y Y $\begin{cases} x+y=65 & (1) \\ \log x+\log y=3 & (2) \end{cases}$

5.1. LA DERIVADA

https://www.youtube.com/watch?v=rp8MKF1UOq8&feature=emb_logo



En una curva cualquiera y = f(x), la pendiente de una recta que pasa por dos puntos sobre la curva, es la pendiente de una recta secante.

Pendiente de la recta secante que pasa por $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ de la curva y=f(x)

$$m_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}$$

$$\Rightarrow m_s = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ahora, si "Δx" comienza a disminuir de tal forma que la recta secante se convierte en una recta tangente; es decir cuando $\Delta x \to 0$.

Pendiente de la curva $y = f(x)$ en cualquier valor x; o sea, pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en cualquier valor "x". Tambien es la derivada de "y" con respecto a "x" en cualquier valor "x"

$$m_T(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \mathbf{f\,'(x)} \quad (\mathbf{1})$$

El dominio de **f '**, es el conjunto de puntos en el dominio de f para los cuales existe el límite, puede ser menor que el dominio de f. Si **f '(x)** existe, decimos que f tiene derivada en x.

Notación: Hay muchas formas de denotar la derivada de una función y = f(x). Además de f '(x), las más comunes son: y'**, dy/dx, df/dx.**

Interpretación geométrica de la derivada. De la definición (1), obtenemos que la derivada de una función f en un punto x, es "la pendiente de la recta tangente a la curva y = f(x) en el punto x".

https://www.youtube.com/watch?v=WEWxiA3vjgE

Ejemplo 1. Derivar f(x) =x/(x-1)

✓ ¿Dónde tiene pendiente –1 la curva f(x)?

Solución.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{x+\Delta x}{x+\Delta x - 1} - \dfrac{x}{x-1}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{(x+\Delta x)(x-1) - x(x+\Delta x - 1)}{(x+\Delta x - 1)(x-1)}}{\Delta x / 1} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)(x-1) - x(x+\Delta x - 1)}{\Delta x(x+\Delta x - 1)(x-1)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(x^2 + x.\Delta x - x - \Delta x - x^2 - x.\Delta x + x\right)}{\Delta x(x+\Delta x - 1)(x-1)} == \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-.\Delta x)}{\Delta x(x+\Delta x - 1)(x-1)} =$$

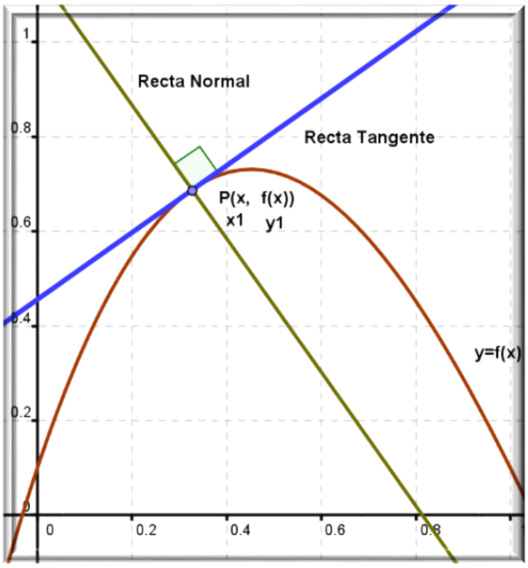
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x+\Delta x - 1)(x-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

✓ La pendiente de y = f(x) será –1, siempre y cuando: f '(x) = -1.

$$\Rightarrow \frac{-1}{(x-1)^2} = -1 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2} = \pm 1 \Rightarrow x - 1 = \pm 1 \Rightarrow$$ x = 0 y x = 2.

https://www.youtube.com/watch?v=onxcTbtfnQA&feature=emb_logo

Recordemos:



Ecuación de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y tiene pendiente "m" $\Big\}$ $\boxed{y-y_1 = m(x-x_1)}$

$L_N \rightarrow$ Recta Normal
$L_T \rightarrow$ Recta Tangente $\Big\}$ $\boxed{m_N \cdot m_T = -1}$

Ejemplo 2.

Hallar la derivada de y = $\sqrt{x}$, para x > 0. Hallar la recta tangente a la curva y = $\sqrt{x}$ en el punto (4, 2).

Solución.

Tenemos que: f(x) = $\sqrt{x}$ y f(x + Δx) = $\sqrt{x+\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} =. \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} =$$

$$\frac{1}{(\sqrt{x+0}+\sqrt{x})} = \frac{1}{(2\sqrt{x})}$$ Para x = 4, entonces: f '(x) = ¼., luego la ecuación de la recta tangente a la curva y = $\sqrt{x}$, en el punto (4,2) es:

$Y - y_1 = m (X - x_1) \Rightarrow y - 2 = ¼ (x - 4) \Rightarrow y = ¼ x + 1.$

Ejemplo 3. Dada y=f(x)=2x^2-3x+5. Halle la pendiente de la curva en x=-1, x=-2, x=3. Dibuje la curva y las tres rectas.

Solución.

$$m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 5 - (2x^2 - 3x + 5)}{\Delta x} = \frac{0}{0} = ?$$

$$m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^2 + 4x.\Delta x + 2\Delta x^2 - 3x - 3.\Delta x + 5 - 2x^2 + 3x - 5}{\Delta x}$$

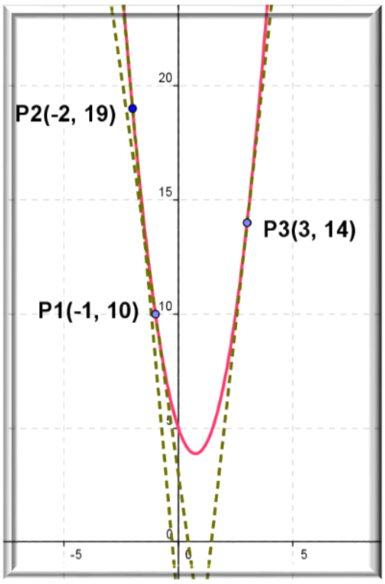
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x.\Delta x + 2\Delta x^2 - 3.\Delta x}{\Delta x} = \frac{0}{0} = ? \quad m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4x + 2.\Delta x - 3)}{\Delta x}$$

$$m(x) = 4x - 3 \quad \to \quad \begin{Bmatrix} m(-1) = 4 * (-1) - 3 = -7 \\ m(-2) = 4 * (-2) - 3 = -11 \\ m(3) = 4 * 3 - 3 = 9 \end{Bmatrix}$$

$f(-1) = 2 * (-1)^2 - 3 * (-1) + 5 = 10 \to$ P1(-1, 10)

$f(-2) = 2 * (-2)^2 - 3 * (-2) + 5 = 19 \to$ P2(-2, 19)

$f(3) = 2 * (3)^2 - 3 * (3) + 5 = 14 \to$ P1(3, 14)



Ejemplo 4. Dada $y = f(x) = 4\sqrt{x - 2}$. Hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva en x=3 y en x=6. Grafique.

Solución. $m_t(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\sqrt{x + \Delta x - 2} - 4\sqrt{x - 2}}{\Delta x} = \frac{0}{0} = ?$

$$m_t(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\overbrace{\left(\sqrt{x + \Delta x - 2} - \sqrt{x - 2}\right)}^{(a-b)}\overbrace{\left(\sqrt{x + \Delta x - 2} + \sqrt{x - 2}\right)}^{(a+b)}}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x - 2} + \sqrt{x - 2}\right)}$$

$$m_t(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\left[\overbrace{\left(\sqrt{x+\Delta x-2}\right)^2-\left(\sqrt{x-2}\right)^2}^{(a^2-b^2)}\right]}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x-2}+\sqrt{x-2}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4[x+\Delta x-2-x+2]}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x-2}+\sqrt{x-2}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4[\Delta x]}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x-2}+\sqrt{x-2}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4}{\left(\sqrt{x+\Delta x-2}+\sqrt{x-2}\right)}=\frac{4}{2\sqrt{x-2}}=\frac{2}{\sqrt{x-2}}$$

$$m_t(x)=\frac{2}{\sqrt{x-2}}\quad\to\quad\begin{Bmatrix}m_t(3)=2\Rightarrow\ m_n(3)=\dfrac{-1}{2}\\ m_t(6)=1\Rightarrow\ m_n(6)=-1\end{Bmatrix}$$

$$f(x)=4\sqrt{x-2}.\Rightarrow\begin{Bmatrix}f(3)=4\sqrt{3-2}=4\ \Rightarrow\ P_1(3,4)\\ f(6)=4\sqrt{6-2}=8\ \Rightarrow\ P_2(6,8)\end{Bmatrix}$$

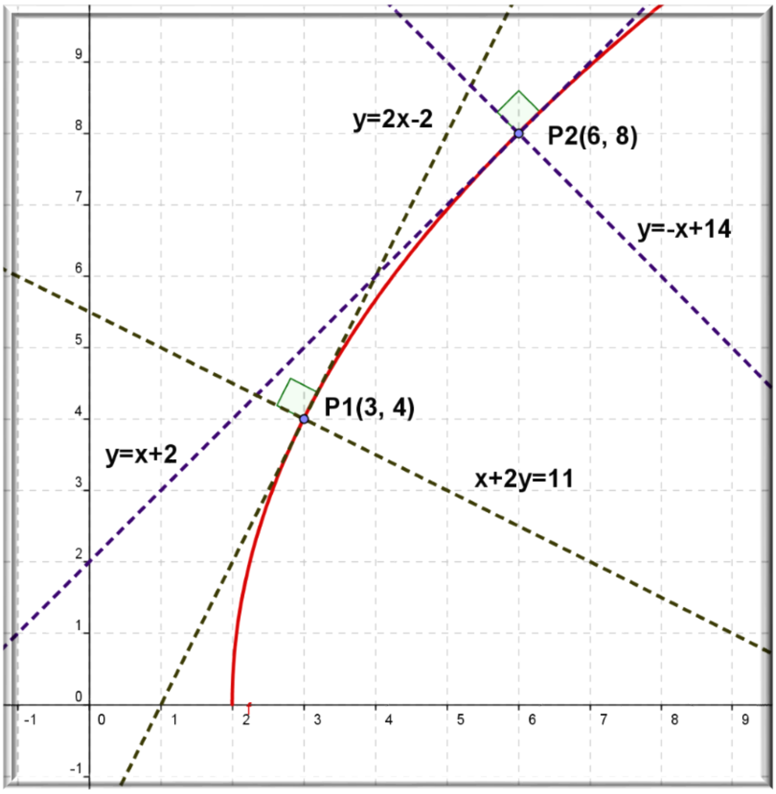
$Ecuación\ de\ la\ recta\ que\ pasa\ por$ $P_1(x_1,y_1)y\ tiene\ pendiente\ m$:

$$\boxed{y-y_1=m(x-x_1)}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)\begin{Bmatrix}\left.\begin{matrix}m_t(3)=2\\P_1(3,4)\end{matrix}\right\}\to y-4=2(x-3)\ \Rightarrow y=2x-2\\ \left.\begin{matrix}m_n(3)=\dfrac{-1}{2}\\P_1(3,4)\end{matrix}\right\}\to y-4=\dfrac{-1}{2}(x-3)\Rightarrow y=\dfrac{-1x}{2}+\dfrac{11}{2}\\ \left.\begin{matrix}m_t(6)=1\\P_2(6,8)\end{matrix}\right\}\to y-8=1(x-6)\Rightarrow y=x+2\\ \left.\begin{matrix}m_n(6)=-1\\P_2(6,8)\end{matrix}\right\}\to y-8=-1(x-6)\Rightarrow y=-x+14\end{Bmatrix}$$

Grafiquemos $f(x)=4\sqrt{x-2}$; primero debemos hallar el dominio para poder hacer la tabla de valores: $x-2\geq 0,\Rightarrow x\geq 2;\quad por\ lo\ tanto$:

X	2	3	6
y	0	4	8



https://www.youtube.com/watch?time_continue=2&v=rmRsl73IgNo

Ejemplo 5. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes y normales a la curva $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$ en x=1 y en x=-1. Grafique

Solución. $m_t(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{3}(x+\Delta x)^3 - \frac{1}{2}(x+\Delta x)^2 + 2 - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2\right)}{\Delta x} = \frac{0}{0} = ?$

$$m_t(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\frac{1}{3}x^3} + x^2.\Delta x + x.\Delta x^2 + \frac{1}{3}\Delta x^3 - \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \mathrm{x}.\Delta \mathrm{x} - \frac{1}{2}\Delta x^2 + \cancel{2} - \cancel{\frac{1}{3}x^3} + \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \cancel{2}}{\Delta x}$$

$$m_t(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2.\Delta x + x.\Delta x^2 + \frac{1}{3}\Delta x^3 - \mathrm{x}.\Delta \mathrm{x} - \frac{1}{2}\Delta x^2}{\Delta x} = \frac{0}{0} = ?$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(x^2 + x.\Delta x^1 + \frac{1}{3}\Delta x^2 - \mathrm{x} - \frac{1}{2}\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}(x^2 + x.\Delta x^1 + \frac{1}{3}\Delta x^2 - \mathrm{x} - \frac{1}{2}\Delta x) = (x^2 - \mathrm{x}) \quad \Rightarrow \quad m_t(x) = (x^2 - \mathrm{x})$$

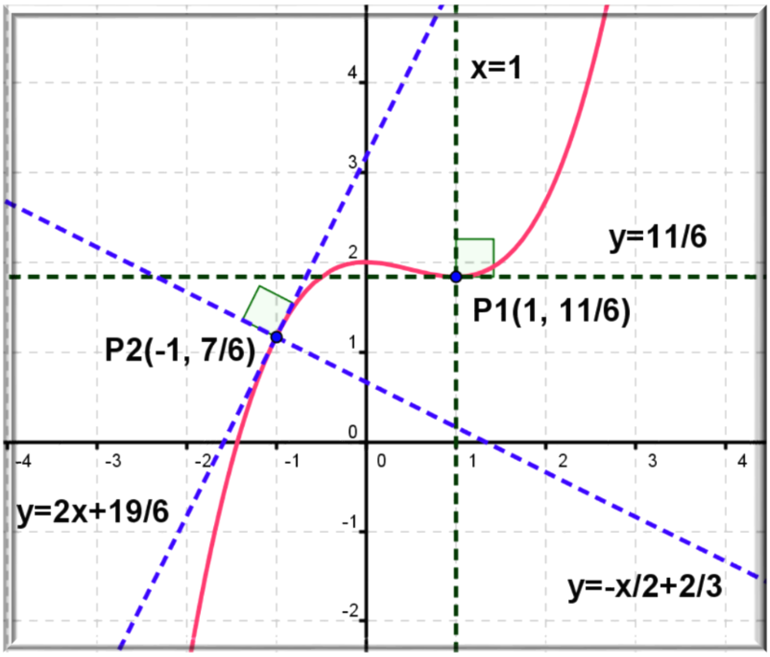
$$\rightarrow \begin{Bmatrix} m_t(1) = 0 \Rightarrow m_n(1) = ? \\ m_t(-1) = 2 \Rightarrow m_n(-1) = -1/2 \end{Bmatrix}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2. \Rightarrow \begin{Bmatrix} f(1) = 11/6 \Rightarrow P_1(1, 11/6) \\ f(-1) = 7/6 \Rightarrow P_2(-1, 7/6) \end{Bmatrix}$$

$Ecuación\ de\ la\ recta\ que\ pasa\ por$

$P_1(x_1, y_1) y\ tiene\ pendiente\ m$: $\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \left\{ \begin{array}{c} \left.\begin{array}{r} m_t(1) = 0 \\ P_1(1, 11/6) \end{array}\right\} \rightarrow y = \dfrac{11}{6} \\ \left.\begin{array}{r} m_n(1) = ? \\ P_1(1, 11/6) \end{array}\right\} \rightarrow x = 1 \\ \left.\begin{array}{r} m_t(-1) = 2 \\ P_2(-1, 7/6) \end{array}\right\} \rightarrow y - 7/6 = 2(x+1) \Rightarrow y = 2x + 19/6 \\ \left.\begin{array}{r} m_n(-1) = -1/2 \\ P_2(-1, 7/6) \end{array}\right\} \rightarrow y - 7/6 = -1/2(x+1) \Rightarrow y = -x/2 + 2/3 \end{array} \right\}$$



5.2. REGLAS DE DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

Potencias, múltiplos, sumas y diferencias.

Derivada de una constante $\boxed{\dfrac{d}{dx}(c) = 0}$

Derivada de una monomio variable. $\boxed{\dfrac{d}{dx}(aX^n) = anX^{n-1}.}$

Regla de suma y de la resta $\boxed{\dfrac{d}{dx}(u \pm v) = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}.}$

Ejemplo 6. $\dfrac{d}{dt}(8) = 0$; $\dfrac{d}{dt}(-½) = 0$; $\dfrac{d}{dt}(\sqrt{3}) = 0$

Ejemplo 7.

.f	X	X^2	x^3	x^4	...
.f '	1	2x	$3x^2$	$4x^3$	...

Ejemplo 8. Sea $y = 3x^2$, calcular y'.

$$\frac{d}{dx}(3x^2) = 3.\frac{d}{dx}(x^2) = 3 \times 2x = 6x$$

Ejemplo 9. Sea $y = x^4 + 12x$, calcular y'.

$$\frac{d}{dx}(x^4 + 12x) = \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x) = 4x^3 + 12$$

Ejemplo 10. Sea $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$, calcular y'.

Solución: $\frac{d}{dx}(x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1) = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(\frac{4}{3}x^2) - \frac{d}{dx}(-5x) + \frac{d}{dx}(1)$

$= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5$

Regla del Producto: Si "u" y "v" son diferenciables en x; su producto u.v también lo es. Así:

$$\frac{d(u.v)}{dx} = u.\frac{d}{dx}(v) + v.\frac{d}{dx}(u)$$

La derivada de u.v es u por la derivada de v más v por la derivada de u.

Ejemplo 11. Hallar la deriva de $y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$

De la regla del producto, con $u = x^2 + 1$ y $v = x^3 + 3,$ tenemos:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(x^2 + 1\right)\left(x^3 + 3\right)\right] = (x^2 + 1)(3x^2) + (x^3 + 3)(2x) = 5x^4 + 3x^2 + 6x$$

Este ejemplo puede resolverse (tal vez mejor) multiplicando la expresión original y diferenciando el polinomio resultante. Revisemos:

$$y = \left[\left(x^2 + 1\right)\left(x^3 + 3\right)\right] = x^5 + x^3 + 3x^2 + 3 \Rightarrow y' = 5x^4 + 3x^2 + 6x$$

Regla del Cociente: Si "u" y "v" son diferentes en x, y $v(x) \neq 0$, entonces el cociente de u/v es diferenciable en x, así:

$$\frac{d}{dx}(u/v) = \frac{\frac{d(u)}{dx}.v - \frac{d(v)}{dx}.u}{v^2}$$

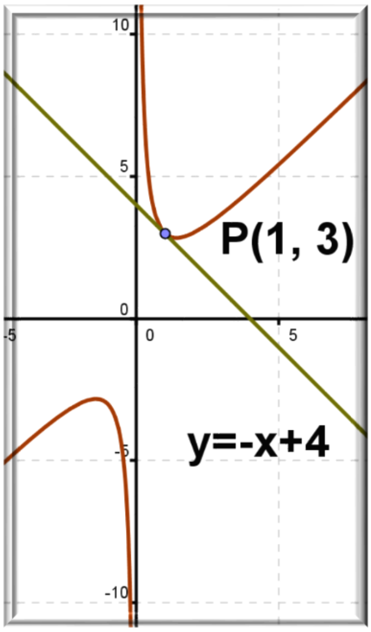
Ejemplo 12. Hallar la derivada de $y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$

Solución: Al aplicar la regla del cociente, con $u = t^2 - 1$ y $v = t^2 + 1$, tenemos:

$$\frac{.dy}{dt} = \frac{2t.\left(t^2+1\right) - 2t.(t^2-1)}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{4t}{\left(t^2+1\right)^2}$$

Ejemplo 13.
Hallar una ecuación para la tangente a la curva $y = x + \frac{2}{x}$, en el punto(1,3).

La gráfica de esta curva es:



La pendiente de la curva es la derivada de la ecuación de la curva y = x + $2x^{-1}$.
.y' = 1 – $2x^{-2}$ ⇒ la pendiente para x = 1 es y' = -1.

La recta por (1, 3) con pendiente m = -1 es:

.y – 3 = -1 (x – 1) ⇒ y = -x + 4.

https://www.youtube.com/watch?v=GWBjoAGQPTM

Derivadas de Orden Superior: Dado que la derivada de una función es otra función, podemos tratar de hallar su derivada. Si se hace tal cosa, el resultado es de nuevo una nueva función que pudiera ser a su vez derivada. Si continuamos así, tenemos lo que se llaman derivadas de orden superior.

Notación de las derivadas de orden superior:

.y' = $\frac{dy}{dx}$ (Primera derivada)

.y'' = $\frac{d^2y}{dx^2}$ (Segunda derivada)

.y''' = $\frac{d^3y}{dx^3}$ (Tercera derivada)

.$y^{(4)}$ = $\frac{d^4y}{dx^4}$ (Cuarta derivada)

.$y^{(n)}$ = $\frac{d^ny}{dx^n}$ (enésima derivada)

Ejemplo 14. Las primeras cuatro derivadas de $y = x^3 - 3x^2 + 2$, son:

Primera derivada: $y' = 3x^2 - 6x$

Segunda derivada: $y'' = 6x - 6$

Tercera derivada: $y''' = 6$

Cuarta derivada: $y^{(4)} = 0$

Ejemplo 15. Hallar las siguientes derivadas:

a) $y = 7 \Rightarrow y' = 0$ b) $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

c) $y = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow y = x^{-2} \Rightarrow y' = -2x^{-3} \Rightarrow y' = \dfrac{-2}{x^3}$

d) $y = \dfrac{2}{x} \Rightarrow y = 2x^{-1} \Rightarrow y = -2x^{-2} \Rightarrow y' = -\dfrac{2}{x^2}$

e) $f(t) = \dfrac{4t^2}{5} \Rightarrow f(t) = \dfrac{4}{5}t^2 \Rightarrow f'(t) = \dfrac{8}{5}t$

f) $g(x) = -\dfrac{x^4}{2} + 3x^3 - 2x \Rightarrow g'(x) = -\dfrac{4x^3}{2} + 9x^2 - 2 = -2x^3 + 9x^2 - 2$

g) $y = \dfrac{5}{(2x)^3} \Rightarrow y = \dfrac{5}{8x^3} = \dfrac{5}{8}x^{-3} \Rightarrow y' = \dfrac{-15}{8}x^{-4} \Rightarrow y' = -\dfrac{15}{8x^4}$

h) $y = \dfrac{7}{(3x)^{-2}} \Rightarrow y = 7(3x)^2 = 7 \times 9x^2 = 63x^2 \Rightarrow y' = 126x$

$i)$ $y = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2x^{2/3}} = \dfrac{1}{2}x^{-2/3} \Rightarrow y' = -\dfrac{2}{6}x^{-5/3}$

$= -\dfrac{1}{3x^{5/3}} = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^5}}$

j) $y = \sqrt{2x} \Rightarrow y = \sqrt{2}x^{1/2} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}x^{-1/2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2x^{1/2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} =$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{x}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\times 2}{x\times 2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^2}{x\times 2}}=\frac{1\times 2}{2}\sqrt{\frac{1}{2x}}=\frac{1}{\sqrt{2x}}$$

k) $f(x)=(3x-2x^2)(5+4x)\Rightarrow f'(x)=(3-4x)(5+4x)+4(3x-2x^2)$

$$l)\quad y=\frac{2x^2-4x+3}{2-3x}\Rightarrow y'=\frac{(4x-4)(2-3x)-(-3)(2x^2-4x+3)}{(2-3x)^2}$$

$$y'=\frac{8x-12x^2-8+12x+6x^2-12x+9}{(2-3x)^2}=\frac{-6x^2+8x+1}{(2-3x)^2}$$

$$m)\quad y=\frac{3-\left(1/x\right)}{x+5}\Rightarrow y=\frac{3-\frac{1}{x}}{x+5}=\frac{\frac{3x-1}{x}}{\frac{x+5}{1}}=\frac{3x-1}{x^2+5x}$$

$$y'=\frac{3(x^2+5x)-(2x+5)(3x-1)}{(x^2+5x)^2}=\frac{3x^2+15x-6x^2+2x-15x+5}{(x^2+5x)^2}$$

$$y'=\frac{-3x^2+2x+5}{(x^2+5x)^2}=\frac{-(3x^2-2x-5)}{[x(x+5)]^2}=\frac{-(3x-5)(3x+3)/3}{x^2(x+5)^2}$$

$$y'=\frac{-(3x-5)3(x+1)/3}{x^2(x+5)^2}=\frac{(5-3x)(x+1)}{x^2(x+5)^2}$$

n) $y=\dfrac{x^2+3x}{6}\Rightarrow y=\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{2}x\Rightarrow y'=\dfrac{2}{6}x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}$

$$o)\quad f(x)=(3x-2x^2)^3\Rightarrow y'=3(3x-2x^2)^2(3-4x)=3[x(3-2x)]^2(3-4x)$$

$$y'=3x^2(3-2x)^2(3-4x)$$

$$p)\quad y=\sqrt[3]{(x^2+2)^2}\Rightarrow y=(x^2+2)^{2/3}\Rightarrow y'=\frac{2}{3}(x^2+2)^{-1/3}(2x)$$

$$\Rightarrow y'=\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2+2}}$$

$$q)\quad f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}}\Rightarrow y=\frac{x}{\left(x^2+4\right)^{1/3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\left(x^2+4\right)^{1/3}-\frac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{-2/3}(2x)x}{\left(x^2+4\right)^{2/3}}$$

$$=\frac{\frac{\left(x^2+4\right)^{1/3}}{1}-\frac{2x^2}{3\left(x^2+4\right)^{2/3}}}{\left(x^2+4\right)^{2/3}}=\frac{\frac{3\left(x^2+4\right)-2x^2}{3\left(x^2+4\right)^{2/3}}}{\left(x^2+4\right)^{2/3}}=\frac{3x^2+12-2x^2}{3\left(x^2+4\right)^{4/3}}=\frac{x^2+12}{3\left(x^2+4\right)^{4/3}}$$

$$r)\quad y=\left\{\frac{3x-1}{x^2+3}\right\}^2\Rightarrow y'=2\left\{\frac{3x-1}{x^2+3}\right\}^1\left\{\frac{3\left(x^2+3\right)-2x(3x-1)}{\left(x^2+3\right)^2}\right\}$$

$$y'=2\left\{\frac{3x-1}{x^2+3}\right\}\times\frac{3x^2+9-6x^2+2x}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{2(3x-1)}{\left(x^2+3\right)}\times\frac{-3x^2+2x+9}{\left(x^2+3\right)^2}$$

$$y'=\frac{2(3x-1)\left(-3x^2+2x+9\right)}{\left(x^2+3\right)^3}$$

5.3. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÈTRICAS

Derivada del Seno:

$$\boxed{\frac{d(\operatorname{sen}u(x))}{dx}=\cos u(x).\frac{d(u(x))}{dx}}$$

Ejemplo 16.

Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

- $y=x^2-Senx\Rightarrow y'=2x-Cosx.1$
- $y=x^2Senx\Rightarrow y'=x^2d(Senx)/dx+Senx.d(x^2)/dx=x^2Cosx+2xSenx$
- $y=\dfrac{Senx}{x}\Rightarrow Y'=\dfrac{x.d(Senx)/dx-Senx.d(x)/dx}{x^2}=\dfrac{xCosx-Senx.1}{x^2}$

Derivada del Coseno:

$$\boxed{\frac{d(\cos u(x))}{dx}=-\operatorname{sen}u(x).\frac{d(u(x))}{dx}}$$

Ejemplo 17: Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

- $y=5x+Cosx\Rightarrow y'=5-Senx$

- $y = \underbrace{Senx}.\underbrace{Cosx} \Rightarrow y' = \underbrace{\cos x}.\underbrace{\cos x} + \underbrace{(-\operatorname{sen} x)}.\underbrace{\operatorname{sen} x} = -Sen^2 x + Cos^2 x$

- $y = \dfrac{Cosx}{1-Senx} \Rightarrow y' = \dfrac{-\operatorname{sen} x(1-Senx)-(-\cos x)Cosx}{(1-Senx)^2} =$

$$= \frac{-Senx + Sen^2 x + Cos^2 x}{(1-Senx)^2} = \frac{1-Senx}{(1-Senx)^2} = \frac{1}{1-\operatorname{sen} x}$$

Derivada de la tangente: $\boxed{\dfrac{d(\tan u(x))}{dx} = \sec^2 u(x).\dfrac{d(u(x))}{dx}}$

Derivada de la Cotangente: $\boxed{\dfrac{d(\cot u(x))}{dx} = -\csc^2 u(x).\dfrac{d(u(x))}{dx}}$

Derivada de la Secante: $\boxed{\dfrac{d(\sec u(x))}{dx} = \sec u(x).\tan u(x).\dfrac{d(u(x))}{dx}}$

Derivada de la Cosecante: $\boxed{\dfrac{d(\csc u(x))}{dx} = -\csc u(x).\cot(x).\dfrac{d(u(x))}{dx}}$

Ejemplo 18: Hallar y'' si y = Sec x.

<u>Solución :</u> $y' = SecxTanx \Rightarrow y'' = Secx.d(Tanx)/dx + Tanx.d(Secx)/dx$

$= Secx.Sec^2 x + Tanx.SecxTanx = Sec^3 X + Tan^2 x.Secx$

Ejemplo 19: Halle las siguientes derivadas:

a) $y = 3x + \cot x \Rightarrow y' = 3 - Csc^2 x$

b) $y = 2/Senx \Rightarrow y = 2Cscx \Rightarrow y' = -2CscxCotx$

c) $y = 3Senx \Rightarrow y' = 3Cosx.$

$d)\quad y = 2xCosx - 2Senx \Rightarrow y' = 2Cosx - Senx.2x - 2Cosx$

$\quad y' = -2xSenx$

e) $y = \dfrac{1-Cosx}{Senx} \Rightarrow y = \dfrac{1}{Senx} - \dfrac{Cosx}{Senx} = Cscx - Cotx$

$\Rightarrow y' = -\csc x.\cot x + \csc^2 x$

f) $y = Cos(3x)^2 \Rightarrow y = Cos9x^2 \Rightarrow y' = -Sen9x^2.18x = -18x.Sen9x^2$

g) $y = (Cos3)x^2 \Rightarrow y' = 2(\cos 3)x$

h) $y = Cos3x^2 \Rightarrow y' = -Sen3x^2.6x = -6x.Sen3x^2$

i) $y = Cos^2 3x \Rightarrow y' = 2Cos3x(-Sen3x)3 = -6Cos3xSen3x$

$$j) \quad y = 2Cot^4 5x^2 \Rightarrow y' = 8Cot^3 5x^2 \left(-\csc^2 5x^2\right)10x$$
$$y' = -80xCot^3 5x^2 Csc^2 5x^2$$

5.4. DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Hasta el momento nos hemos encontrado con funciones donde la variable "y" se encuentra despejada (se encuentra sola en un lado del igual), y para encontrar su derivada (y**'** = dy/dx) simplemente derivamos directamente.

Pero no siempre encontramos funciones en donde se pueda despejar la variable "y" y así poder encontrar su derivada en forma sencilla. $(Ej..x^3 + 3xy + y^3 = 10).$

Para esto se utiliza una técnica llamada la derivada implícita, y para esto se utilizan los siguientes pasos:

- se deriva la función utilizando las reglas normales de la derivación.
- Cada vez que derivo con respecto a la variable "y", acompaño esta derivada con el diferencial dy/dx; y cuando se deriva con respectivo a "x" no se acompaña esta derivada con ningún diferencial.
- Se reúnen términos semejantes (dy/dx = y').
- Se despeja los dy/dx, (y').

Ejemplo 20. Hallar dy/dx si 2y = x^2 + Sen y.

Derivando implícitamente tenemos:

$$\underline{Solución:}\ \ 2y' = 2x + Cosy.y'$$

$$\Rightarrow 2y' - y'Cosy = 2x \Rightarrow y'(2 - Cosy) = 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{2 - Cosy}$$

Ejercicio 21. Hallar la tangente y la normal a la curva x^2 - xy + y^2 = 7 en el punto (-1,2).

$$\underline{Soluciön:}\ \ 2x - xy' - y + 2y.y' = 0 \Rightarrow 2y.y' - xy' = y - 2x$$
$$\Rightarrow y'(2y - x) = y - 2x \Rightarrow y' = (y - 2x)/(2y - x)$$

Para calcular la pendiente, evaluamos la derivada en el punto (-1,2).

$$y' = (2 - 2.(-1))/(2.2 - (-1)) = 4/5$$

La recta tangente a la curva del ejercicio en el punto (-1,2) es:

$$y-2=\frac{4}{5}(x+1)\Rightarrow y=\frac{4}{5}x+\frac{4}{5}+2\Rightarrow y=\frac{4}{5}x+\frac{14}{5}$$

Para calcular la recta normal a la curva, primero calculamos su pendiente así:

$$.m(normal)=-1/m(tangente)$$

$$m_n=-1/(4/5)\Rightarrow m_n=-5/4$$

Luego la ecuación de la recta normal es: $y-2=\frac{-5}{4}(x+1)\Rightarrow y=\frac{-5}{4}x+\frac{3}{4}$

<u>Ejemplo 22.</u> Calcular dy/dx en:

a) $y^3+y^2-5y-x^2=4$

$$\underline{Solución:}\;\; 3y^2.y'+2y.y'-5y'-2x=0\Rightarrow 3y^2y'+2yy'-5y'=2x$$

$$\Rightarrow y'(3y^2+2y-5)=2x\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+2y-5}$$

b) $x^2+y^2=0$

$$\underline{Soluciön:}\;\; 2x+2yy'=0\Rightarrow 2yy'=-2x\Rightarrow y'=\frac{-2x}{2y}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$$

c) $x^2+y^2=1$

$$\underline{Solución:}\;\; 2x+2yy'=0\Rightarrow y'=\frac{-2x}{2y}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

d) $x+y^2=1$

$$\underline{Soluciön:}\;\; 1+2y.y'=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2y}$$

e) $x^2+y=1$

$$\underline{Soluciön:}\;\; 2x+y'=0\Rightarrow y'=-2x$$

<u>Ejemplo 23.</u> Hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $x^2+4y^2=4$ en el punto A $\left(\sqrt{2},-1/\sqrt{2}\right)$.

Solución:

$$2x+8yy'=0\Rightarrow y'=-\frac{2x}{8y}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=m(x,y)=-\frac{x}{4y}$$

$$m(\sqrt{2},-1/\sqrt{2})=\frac{-\sqrt{2}}{4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{\frac{-\sqrt{2}}{1}}{\frac{-4}{\sqrt{2}}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo 24. Hallar la pendiente de la gráfica de $3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$

$$Solución:\ 6(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = 100y + y'100x \Rightarrow 12\left(x^2 + y^2\right)\left(x + yy'\right) = 100y + 100xy'$$
$$\Rightarrow \div 4 \rightarrow 3(x^2 + y^2)(x + yy') = 25y + 25xy' \Rightarrow (3x^2 + 3y^2)(x + yy') = 25y + 25xy'$$

$$\Rightarrow 3x^3 + 3x^2yy' + 3y^2x + 3y^3y' = 25y + 25xy' \Rightarrow 3x^2yy' + 3y^3y' - 25xy' = 25y - 3x^3 - 3y^2x$$
$$y'(3x^2y + 3y^3 - 25x) = 25y - 3x^3 - 3y^2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{25y - 3x^3 - 3y^2x}{3x^2y + 3y^3 - 25x} = m(x, y)$$

Ejemplo 25. Dada $x^2 + y^2 = 25$. Calcular y" y simplifique lo máximo

$$Soluciön:\quad 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{2y} \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} \quad \Rightarrow y'' = -\frac{1 \cdot y - y'x}{y^2} \Rightarrow$$

$$y'' = -\frac{y - x(\frac{-x}{y})}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} \quad \Rightarrow y'' = -\frac{\frac{y + \frac{x^2}{y}}{}}{\frac{y^2}{1}} = -\frac{\frac{y^2 + x^2}{y}}{\frac{y^2}{1}} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{25}{y^3}$$

Ejemplo 26. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2(x^2 + y^2) = y^2$ en el punto $c\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Solución:

$$x^4 + x^2y^2 = y^2 \Rightarrow 4x^3 + 2xy^2 + 2yy'x^2 = 2yy'$$
$$2yx^2y' - 2yy' = -4x^3 - 2xy^2; \quad \div 2 \rightarrow yx^2y' - yy' = -2x^3 - xy^2$$
$$m(x, y) = y' = \frac{-2x^3 - xy^2}{yx^2 - y} \Rightarrow m(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{-2(\frac{\sqrt{2}}{2})^3 - \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{\frac{-4\sqrt{2}}{8} - \frac{2\sqrt{2}}{8}}{\frac{2\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 3 \quad \Rightarrow Ec. \rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$\Rightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{2} = 3(x - \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad \Rightarrow \frac{2y - \sqrt{2}}{2} = 3(\frac{2x - \sqrt{2}}{2}) \quad \Rightarrow 2y - \sqrt{2} = 6x - 3\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow \quad 0 = 6x - 2y - 2\sqrt{2} \qquad \div 2 \rightarrow 0 = 3x - y - \sqrt{2}$$

5.5. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

La derivada del logaritmo natural (Ln u(x)); $\boxed{\dfrac{d}{dx}(Ln\ \ u(x)) \ = \ \dfrac{d(u(x))}{u(x)}}$

La derivada de la función exponencial $(e^{u(x)}$; $\boxed{\dfrac{d}{dx}(e^{u(x)}) = e^{u(x)} \cdot d(u(x))}$

En donde el número e, es una constante equivalente a e=2.7182818

Ejemplo 27. Hallar la derivada de y= Ln(2x)

$$Soluciön: \quad Y = Ln(2x) \Rightarrow y' = \frac{1}{2x} \cdot d(2x)/dx = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

Propiedades de los logaritmos:

$$\boxed{\begin{array}{l} Log_b(n \cdot m) = Log_b n + Log_b m \\ Log_b(n/m) = Log_b n - Log_b m \\ Log_b(n^m) = mLog_b n \end{array}}$$

Para la función exponencial, se cumplen las mismas propiedades de los exponentes conocidos en la función potenciación. Adicionalmente a estas propiedades también se cumple: $\boxed{\ln \ \ (e^x) \ \ = x}$ y $\boxed{e^{\ln x} = x}$

Esto cumple debido a que la función logarítmica y la función exponencial son funciones inversas.

Ejemplo 28. Hallar la derivada de la función $y = \dfrac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}, con\ x \neq 1$

usando las propiedades de los logaritmos.

Solución: Aplicando logaritmo natural (ln) a ambos lados del igual, queda:

$$\text{Ln y} = \ln\left[\frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{(x-1)}\right] = \ln\ \left[(x^2+1)(x+3)^{1/2}\right] - \ln\ (x-1)$$

$$= \ln(x^2+1) + \ln(x+3)^{1/2} - \ln(x-1) = \ln(x^2+1) + \tfrac{1}{2}\ln(x+3) - \ln(x-1)$$

Derivamos en ambos lados de igual:

$$\frac{Y'}{Y}=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1/2}{x+3}-\frac{1}{x-1}\Rightarrow y'=y\left[\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1/2}{x+3}-\frac{1}{x-1}\right]$$

$$Y'=\frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{(x-1)}\left[\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1/2}{x+3}-\frac{1}{x-1}\right]$$

El estudiante debe realizar este mismo ejercicio, pero aplicando la fórmula de la derivada para un cociente, y comprobar si llega al mismo resultado anterior.

Ejemplo 29. Hallar las siguientes derivadas

a. $y=e^{-x}\Rightarrow y'=e^{-x}\cdot d(-x)/dx=-e^{-x}$

b. $y=e^{Senx}\Rightarrow y'=e^{Senx}\cdot d(Senx)/dx=Cosx\,e^{Senx}$

c. $y=\ln(4x^3-7x^2+5-e^{8x^3})\quad\Rightarrow y'=\dfrac{12x^2-14x-e^{8x^3}.24x^2}{4x^3-7x^2+5-e^{8x^3}}$

1. $f(x)=\ln\mu(x)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)}$
2. $f(x)=\log_a\mu(x)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)}\cdot\log_a e$
3. $f(x)=e^{\mu(x)}\Rightarrow f'(x)=e^{\mu(x)}\cdot\mu'(x)$
4. $f(x)=a^{u(x)}\Rightarrow f'(x)=a^{u(x)}.u'(x).\ln a$

$\mu(x)\rightarrow$ variable

$a\rightarrow$ cte

$e=2{,}7182...$

Ejemplo 30. Hallar las siguientes derivadas:

a. $y=\ln(2x)\Rightarrow y'=\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x}$ **b**. $y=\ln(x^2+1)\Rightarrow y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$

c. $y=x\cdot\ln x\Rightarrow y'=1\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}\cdot x=\ln x+1$

d. $y = \ln \sqrt{x+1} \Rightarrow y' = \dfrac{\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}(1)}{(x+1)^{1/2}} = \dfrac{1}{2(x+1)}$

e. $y = \ln\left[\dfrac{x(x^2+1)^2}{\sqrt{2x^3-1}}\right]$ $\quad NOTA: Aplicar\ las\ propiedades\ de\ los\ \log aritmos$

$$\Rightarrow y = \ln x + \ln(x^2+1)^2 - \ln(2x^3-1)^{1/2}$$

$$y = \ln x + 2 \cdot \ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(2x^3-1)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{x} + \frac{2 \times 2\ \ x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{6x^2}{(2x^3-1)} \Rightarrow y' = \frac{1}{x} + \frac{4x}{x^2+1} - \frac{3x^2}{2x^3-1}$$

f. $\mathrm{y} = \dfrac{(\mathrm{x}-2)^2(\mathrm{x}^2+4)^5}{\sqrt{\mathrm{x}^2+1}}$ Aplicando las propiedades de los logaritmos

obtendremos: $\ln y = \ln\left[\dfrac{(x-2)^2(x^2+4)^5}{(x^2+1)^{1/2}}\right]$

$$\Rightarrow \ln y = 2\ln(x-2) + 5\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$\frac{y'}{y} = 2 \cdot \frac{1}{x-2} + 5.\frac{2x}{x^2+4} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow y' = \left(\frac{2}{x-2} + \frac{10x}{x^2+4} - \frac{x}{x^2+1}\right)y$$

g. $\mathrm{y} = \mathrm{e}^{2\mathrm{x}-1} \Rightarrow \mathrm{y}' = \mathrm{e}^{2\mathrm{x}-1} \cdot 2$

h. $\mathrm{y} = \mathrm{e}^{-3/\mathrm{x}} \Rightarrow \mathrm{y} = \mathrm{e}^{-3\mathrm{x}^{-1}} \Rightarrow \mathrm{y}' = \mathrm{e}^{-3\mathrm{x}^{-1}}(3\mathrm{x}^{-2}) = \dfrac{3}{\mathrm{x}^2}\mathrm{e}^{-3/\mathrm{x}}$

i. $\mathrm{y} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \Rightarrow \mathrm{y}' = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \cdot 1\mathrm{x} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \mathrm{x}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$

j. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} (-\dfrac{2}{2}x) = \dfrac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

k. $\mathrm{y} = 2^{\mathrm{x}} \Rightarrow \mathrm{y}' = 2^{\mathrm{x}} \cdot 1\ln(2)$

l. $y = 2^{\sqrt{x}} \Rightarrow y = 2^{x^{1/2}} \Rightarrow y' = 2^{x^{1/2}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \ln 2 = \frac{2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \cdot \ln 2$

m. $y = \log_{10} \cos x \Rightarrow y' = -\frac{\text{senx}}{\cos x} \cdot \log_{10} e = -\tan x \cdot \log\ \ e$

n. $y = 3\ln\left[\cos^3(4x^2+5)\right] \Rightarrow y = 9\ln\left[\cos(4x^2+5)\right]$

$$y' = \frac{-9 \quad \text{sen}(4x^2+5)\ 8x}{\cos(4x^2+5)} \Rightarrow y' = -72x tan(4x^2+5)$$

o. $y = 5.\left[\ln\left(e^{sen^3\left(2x^2+5\right)}\right)\right]^4 \Rightarrow \quad y = 5.\left[sen^3\left(2x^2+5\right).\ln e\right]^4$

$$y = 5sen^{12}(2x^2+5)$$

$$\Rightarrow y' = 60 sen^{11}(2x^2+5)\cdot\cos(2x^2+5)4x$$

$$y' = 240 x sen^{11}(2x^2+5)\cdot\cos(2x^2+5)$$

p. $y = tan^4(e^{\text{sen}(\ln x^2)})$

$$y' = 4tan^3(e^{\text{sen}(\ln x^2)})\cdot\sec^2(e^{\text{sen}(\ln x^2)})\cdot e^{\text{sen}(\ln x^2)}{}_x\ \cos(\ln x^{2)}\cdot\frac{2x}{x^2}$$

5.6. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$$\left\{\begin{array}{l} y = arc.\text{sen}\ u(x) \\ y = arc.\cos u(x) \end{array}\right\} \Rightarrow y' = \frac{\pm u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y = arc.tan\, u(x) \\ y = arc.\cot u(x) \end{array}\right\} \Rightarrow y' = \frac{\pm u'(x)}{1+[u(x)]^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y = arc.\sec u(x) \\ y = arc.\csc u(x) \end{array}\right\} \Rightarrow y' = \frac{\pm u'(x)}{|u(x)|\sqrt{[u(x)]^2-1}}$$

<u>**Ejemplo 31.**</u> Derivar: **a)** y = arc.tan(3x) $\Rightarrow y' = \dfrac{3}{1+9x^2}$

b) $y = arc.\text{sen}\sqrt{x} \quad \Rightarrow y' = \dfrac{\frac{1}{2}x^{-1/2}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

c) $y = arc.\text{sec}e^{2x} \quad \Rightarrow y' = \dfrac{\ell^{2x}.2}{\left|\ell^{2x}\right|\sqrt{(\ell^{2x})^2-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{\ell^{4x}-1}}$

d) $y = arc.\text{sen}\,x + x\sqrt{1-x^2}$ y simplificar lo máximo.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x).x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{1+1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1-x^2)^{1/2}} = 2.(1-x^2)^{1/2} = 2\sqrt{1-x^2} = y'$$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1} - \text{arc.}tan\,x\right)$ y simplificar

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{2}\text{arc.}tan\,\text{x} = \frac{1}{4}\ln(x+1) - \frac{1}{4}\ln(x-1) - \frac{1}{2}arc.tanx \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{4}.\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}.\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}.\frac{1}{1+x^2}$$

$$y' = \frac{(x-1)(1+x^2)-(x+1)(1+x^2)-2(x+1)(x-1)}{4(x+1)(x-1)(1+x^2)}$$

$$y' = \frac{x+x^3-1-x^2-x-x^3-1-x^2-2x^2+2}{4(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{-4x^2}{4(x^4-1)} = \frac{-x^2}{x^4-1} = y'$$

f) Derivar y simplificar y(t) = tan(arc.sent)

$$y'(t) = \sec^2(arc.\text{sen}\,t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

g) $y = tan^{-1}(\text{sen}\,2x) \Rightarrow y' = \dfrac{\cos 2x \times 2}{1+\text{sen}^2\,2x} = \dfrac{2.\cos 2x}{1+\text{sen}^2\,2x}$

h) $y = arc.\text{sen}(\ln x) \Rightarrow y' = \dfrac{1/x}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

i) $y = \left(\dfrac{1}{x} - arc.\text{sen}\dfrac{1}{x}\right)^4$

$$y' = 4\left(\frac{1}{x} - arc.\text{sen}\frac{1}{x}\right)^3 . \left(-x^{-2} - \frac{-x^{-2}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\right) = 4\left(\frac{1}{x} - arc.\text{sen}\frac{1}{x}\right)^3 \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{x} - arc.\text{sen}\frac{1}{x}\right)^3 . \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right)$$

5.7. RESÚMEN DE FÓRMULAS DE LAS DERIVADAS:

Si tengo $\boldsymbol{y = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = f'(x)}$

Derivadas de las funciones algebraicas

$$\mathbf{1.}\,\boldsymbol{Derivada\ de\ un\ monomio\ constante \rightarrow f(x) = c \ \Rightarrow f'(x) = 0}$$

$$\mathbf{2.}\,\boldsymbol{Derivada\ de\ un\ monomio\ variable \rightarrow f(x) = ax^n \Rightarrow \ f'(x) = anx^{n-1}}$$

$$\mathbf{3.}\,\boldsymbol{Derivada\ de\ un\ producto \rightarrow f(x) = g(x).h(x) \ \Rightarrow \ f'(x) = g'(x).h(x) + h'(x).g(x)}$$

$$\mathbf{4.}\,\boldsymbol{Derivada\ de\ un\ cociente \rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow \ f'(x) = \frac{g'(x).h(x) - h'(x).g(x)}{[h(x)]^2}}$$

$$\mathbf{5.}\,\boldsymbol{Regla\ de\ la\ cadena \rightarrow f(x) = a[w(x)]^n \Rightarrow \ f'(x) = an[w(x)]^{n-1}.w'(x)}$$
$$\boldsymbol{Donde: w(x)\ puede\ ser\ funci\acute{o}n\ trig., log., exp., polinomica, etc.}$$
$$\boldsymbol{y \ \ w'(x)\ es\ la\ derivada\ interna}$$

Derivadas de las funciones trigonométricas

6. $f(x) = a\,\text{sen}\,\mu(x) \Rightarrow f'(x) = a\cos\mu(x).\,\mu'(x)$
7. $f(x) = a\cos\mu(x) \Rightarrow f'(x) = -a\,\text{sen}\,\mu(x).\,\mu'(x)$
8. $f(x) = a\tan\mu(x) \Rightarrow f'(x) = a\sec^2\mu(x).\,\mu'(x)$
9. $f(x) = a\cot\mu(x) \Rightarrow f'(x) = -a\csc^2\mu(x).\,\mu'(x)$
10. $f(x) = a\sec\mu(x) \Rightarrow f'(x) = a.\sec\mu(x).\tan\mu(x).\,\mu'(x)$
11. $f(x) = a\csc\mu(x) \Rightarrow f'(x) = -a.\csc\mu(x).\cot\mu(x).\,\mu'(x)$

Derivadas de las funciones Exponenciales y logarítmicas	Derivadas de las funciones trigonométricas inversas
12. $f(x) = \ln\mu(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)}$	16. $\left.\begin{array}{l} y = arc.\text{sen}\,\mu(x) \\ y = arc.\cos\mu(x) \end{array}\right] \Rightarrow y' = \dfrac{\pm\,\mu'(x)}{\sqrt{1-[\mu(x)]^2}}$
13. $f(x) = \log_a\mu(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)}.\log_a e$	17. $\left.\begin{array}{l} y = arc.\tan\mu(x) \\ y = arc.\cot\mu(x) \end{array}\right] \Rightarrow y' = \dfrac{\pm\,\mu'(x)}{1+[\mu(x)]^2}$
14. $f(x) = e^{\mu(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{\mu(x)}.\mu'(x)$ 15. $f(x) = a^{\mu(x)} \Rightarrow f'(x) = a^{\mu(x)}.\mu'(x).\ln a$	18. $\left.\begin{array}{l} y = arc.\sec\mu(x) \\ y = arc.\csc\mu(x) \end{array}\right] \Rightarrow y' = \dfrac{\pm\,\mu'(x)}{[\mu(x)]\sqrt{[\mu(x)]^2-1}}$

5.8. MÁS EJERCICIOS RESUELTOS SOBRE DERIVADAS

Hallar dy/dx y simplique lo máximo:

Ejemplo 32. $y = \underbrace{x}\underbrace{[\text{sen}(\ln x) + \cos(\ln x)]}$

Solución: $y' = \underbrace{1}\underbrace{[sen(\ln x) + \cos(\ln x)]} + \underbrace{\left[\cos(\ln x)_x\,\frac{1}{x} - sen(\ln x)_x\,\frac{1}{x}\right]}\underbrace{x}$

$$y' = [sen(\ln x) + \cos(\ln x)] + \frac{1}{x}[\cos(\ln x) - sen(\ln x)]x$$

$$y' = \cancel{sen(\ln x)} + \cos(\ln x) + \cos(\ln x) - \cancel{sen(\ln x)} \Rightarrow y' = 2\cos(\ln x)$$

Ejemplo 33. $y = x^{x^2}$

Solución: $y = x^{x^2} \Rightarrow \ln y = \ln x^{x^2} \Rightarrow \ln y = \underbrace{x^2}\cdot\underbrace{\ln x}$

$$\frac{y'}{y} = 2x\ln x + \frac{1}{x}\cdot x^2 \Rightarrow y' = \left(2x\cdot\ln x + x\right)y = x\left(2\ln x + 1\right)x^{x^2}$$

$$y' = \left(\ln x^2 + 1\right)x^{x^2+1}$$

Ejemplo 34. $y = \underbrace{x}\cdot\underbrace{\ln\left(a^2 + x^2\right)} - 2x - 2a\cdot\operatorname{arctg}\frac{a}{x}$

Solución: $y' = \underbrace{1}\cdot\underbrace{\ln\left(a^2 + x^2\right)} + \frac{2x}{\underbrace{a^2 + x^2}}\cdot\underbrace{x} - 2 - 2a\cdot\frac{-ax^{-2}}{1+\left(\frac{a}{x}\right)^2}$

$$y' = \ln\left(a^2 + x^2\right) + \frac{2x^2}{a^2 + x^2} - 2 + \frac{2a^2}{x^2\left(\frac{x^2 + a^2}{x^2}\right)}$$

$$y' = \frac{\left(a^2 + x^2\right)\times\ln\left(a^2 + x^2\right) + 2x^2 - 2\left(a^2 + x^2\right) + 2a^2}{a^2 + x^2}$$

$$y' = \frac{\left(a^2 + x^2\right)\cdot\ln\left(a^2 + x^2\right) + 2x^2 - 2a^2 - 2x^2 + 2a^2}{a^2 + x^2}$$

$$y' = \frac{\left(a^2 + x^2\right)\cdot\ln\left(a^2 + x^2\right)}{\left(a^2 + x^2\right)} \Rightarrow y' = \ln\left(a^2 + x^2\right)$$

Ejemplo 35. $x^3 + y^3 = \underbrace{8x}\cdot\underbrace{y}$

Solución: $3x^2 + 3y^2\cdot y' = \underbrace{8}\cdot\underbrace{y} + \underbrace{y'}\cdot\underbrace{8x} \Rightarrow 3y^2\cdot y' - 8x\cdot y' = 8y - 3x^2$

$$y' = \frac{8y - 3x^2}{3y^2 - 8x}$$

Ejemplo36. $y = \underbrace{x}\cdot\underbrace{\left(arc\cdot\operatorname{sen} x\right)^2} - 2x + \underbrace{2\sqrt{1 - x^2}}\cdot\underbrace{arc\cdot\operatorname{sen} x}$

Solución:

$$y' = \underbrace{1}\underbrace{(arc\cdot\operatorname{sen}x)^2} + \underbrace{2(arc\cdot\operatorname{sen}x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\cdot\underbrace{x} - 2 + \underbrace{\frac{2}{2}\left(1-x^2\right)^{-1/2}(-2x)}\cdot\underbrace{arc\cdot\operatorname{sen}x} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\cdot\underbrace{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = (arc\cdot\operatorname{sen}x)^2 + \frac{2x\cdot\operatorname{arcsen}x}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} - 2 - \frac{2x\operatorname{arcsen}x}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} + \frac{2\cancel{\sqrt{1-x^2}}}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} = (arc\cdot\operatorname{sen}x)^2 \cancel{-2}\cancel{+2}$$

$$y' = (arc\cdot\operatorname{sen}x)^2$$

Ejemplo 37. $(x+y)^2 - (x-y)^2 = x^4 + y^4$

Solución: $x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = x^4 + y^4 \Rightarrow 4xy = x^4 + y^4$

$$\Rightarrow 4y + y'4x = 4x^3 + 4y^3y' \to \div 4 \Rightarrow y + xy' = x^3 + y^3y'$$

$$\Rightarrow xy' - y^3y' = x^3 - y \Rightarrow y'\left(x - y^3\right) = x^3 - y \Rightarrow y' = \frac{x^3 - y}{x - y^3}$$

Ejemplo 38. $y = \ln x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \frac{arc\cdot\tan x}{x}$

Solución:

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2} - \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot x - 1arc\cdot\tan x}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{\frac{x-\left(1+x^2\right)\cdot arc\cdot\tan x}{1+x^2}}{\frac{x^2}{1}}$$

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{x-\left(1+x^2\right)arc\cdot tanx}{x^2\left(1+x^2\right)} = \frac{x\left(1+x^2\right) - x^3 - x + \left(1+x^2\right)arc\cdot tanx}{x^2\left(1+x^2\right)}$$

$$= \frac{x + x^3 - x^3 - x + \left(1+x^2\right)arc\cdot tanx}{x^2\left(1+x^2\right)} = \frac{\cancel{\left(1+x^2\right)}arc\cdot tanx}{x^2\cancel{\left(1+x^2\right)}}$$

$$y' = \frac{arc\cdot\tan x}{x^2}$$

Ejemplo 39. $x^2 = \frac{x+2y}{x-2y}$

Solución: $2x = \frac{(1+2y')(x-2y) - (1-2y')(x+2y)}{(x-2y)^2}$

$$2x = \frac{x - 2y + 2y'x - 4yy' - x - 2y + 2y'x + 4yy'}{(x-2y)^2} \Rightarrow 2x(x-2y)^2 = -4y + 4y'x$$

$$\div 2 \to x(x-2y)^2 = -2y + 2y'x \Rightarrow x(x-2y)^2\,2y = 2y'x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x(x-2y)^2 + 2y}{2x}$$

Ejemplo 40. $x+\tan^3(xy)=0$

Solución: $1+3\tan^2(xy)\cdot\sec^2(xy)(1\cdot y+y´x)=0$

$$\Rightarrow 3\tan^2(xy)\cdot\sec^2(xy)(1\cdot y+y´x)=-1\Rightarrow y+y´x=\frac{-1}{3\tan^2(xy)\cdot\sec^2(xy)}$$

$$y´x=\frac{-1}{3\tan^2(xy)\cdot\sec^2(xy)}-y=\frac{-1-3y\tan^2(xy)\cdot\sec^2(xy)}{3\tan^2(xy)\cdot\sec^2(xy)}$$

$$y´=\frac{-1-3y\tan^2(xy)\sec^2(xy)}{3x\cdot\tan^2(xy)\cdot\sec^2(xy)}$$

Ejemplo 41. $\ln(xy)=e^{x+y}$

Solución: $\frac{1\cdot y+y'x}{xy}=e^{x+y}(1+y')\Rightarrow y+y´x=xye^{x+y}+xye^{x+y}y´$

$$\Rightarrow y-xye^{x+y}=xye^{x+y}y´-y´x\Rightarrow y\left(1-xe^{x+y}\right)=xy'\left(ye^{x+y}-1\right)$$

$$y´=\frac{y\left(1-xe^{x+y}\right)}{x\left(ye^{x+y}-1\right)}$$

Ejemplo 42. $y^2=\operatorname{sen}^4 2x+\cos^4 2x$

Solución: $2y\cdot y´=4\operatorname{sen}^3 2x\cdot\cos 2x\cdot 2+4\cos^3 2x\cdot(-\operatorname{sen}2x)2$

$$\div 2\rightarrow y´=\frac{4sen^3 2x\cdot\cos 2x-4\cos^3 2x\cdot sen2x}{y}=\frac{4sen\ \ 2x\cdot\cos 2x\left(sen^2 2x-\cos^2 2x\right)}{y}$$

$$y´=\frac{-2(2sen2x\cdot\cos 2x)\left(\cos^2 2x-sen^2 2x\right)}{y}=\frac{-2sen4x\cdot\cos 4x}{y}$$

$$\Rightarrow y´=\frac{-sen8x}{y}$$

Ejemplo 43. $y=x\cdot\cos^{-1}2x-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$

Solución: $y´=1\cdot\cos^{-1}2x+\frac{(-2)}{\sqrt{1-4x^2}}\cdot x-\frac{1}{4}\left(1-4x^2\right)^{-1/2}(-8x)$

$$y´=\cos^{-1}2x-\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}+\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\Rightarrow y´=\cos^{-1}2x$$

Ejemplo 44. $y = x \cdot \sec^{-1} x - \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

Solución: $y' = 1 \cdot \sec^{-1} x + \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \cdot x - \dfrac{1 + \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)^{-1/2} \cdot (2x)}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

$$y' = \sec^{-1} x + \frac{x}{x\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}}{\underbrace{x + \sqrt{x^2 - 1}}} = \sec^{-1} x + \cancel{\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}$$

$$\frac{\dfrac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{\dfrac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \Rightarrow y' = \sec^{-1} x$$

Ejemplo 45. $e^{2x} = sen(x + 3y)$

Solución: $e^{2x} \cdot 2 = \cos(x + 3y)(1 + 3y') \Rightarrow \dfrac{2e^{2x}}{\cos(x + 3y)} = 1 + 3y'$

$$\Rightarrow 3y' = \frac{2e^{2x}}{\cos(x + 3y)} - 1 \Rightarrow 3y' = \frac{2e^{2x} - \cos(x + 3y)}{\cos(x + 3y)} \Rightarrow y' = \frac{2e^{2x} - \cos(x + 3y)}{3\cos(x + 3y)}$$

Ejemplo 46. $x \cdot seny + x^3 = \tan^{-1} y$

Solución: $1 \cdot \operatorname{sen} y + x \cdot \cos y \cdot y' + 3x^2 = \dfrac{y'}{1 + y^2}$

$$\operatorname{sen} y + 3x^2 = \frac{y}{1 + y^2} - xy'\cos y \Rightarrow [\left(\operatorname{sen} y + 3x^2\right)\left(1 + y^2\right) = y' - xy'\cos y\left(1 + y^2\right)]/(1 + y^2)$$

$$\Rightarrow \left(sen + 3x^2\right)\left(1 + y^2\right) = y'\left(1 - x \cdot \cos y - xy^2 \cos y\right)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\left(seny + 3x^2\right)\left(1 + y^2\right)}{1 - x\cos y - xy^2 \cos y}$$

Ejemplo 47. $5tan^4\left(\ln\left(2x^2 + 1\right)^3\right) = 5y^2$

Solución: $5tan^4\left[3.\ln\left(2x^2 + 1\right)\right] = 5y^2 \Rightarrow$

$$20tan^3\left(3.\ln\left(2x^2 + 1\right)\right) \cdot \sec^2\left(3.\ln\left(2x^2 + 1\right)\right) \cdot \frac{3 \times 4x}{\left(2x^2 + 1\right)} = 10y \cdot y'$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\cancel{24}0x.tan^3\left(3.\ln\left(2x^2+1\right)\right)\cdot \sec^2\left(3.\ln\left(2x^2+1\right)\right)}{\cancel{10}y\left(2x^2+1\right)}$$

Ejemplo 48. $y = \dfrac{e^{2x^2-1}\sqrt{2x^2-1}}{x^3\left(x^2-1\right)^2}$ Aplique las propiedades de los logaritmos.

Solución: $\ln y = \left(2x^2-1\right)\cdot \ln e + \dfrac{1}{2}\ln\left(2x^2-1\right) - 3\ln x - 2\ln\left(x^2-1\right)$

Escriba aquí la ecuación.

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 4x + \frac{1}{2}\cdot\frac{4x}{\left(2x^2-1\right)} - 3\cdot\frac{1}{x} - 2\cdot\frac{2x}{x^2-1}$$

$$y' = \left[4x + \frac{2x}{2x^2-1} - \frac{3}{x} - \frac{4x}{x^2-1}\right]\times\frac{e^{2x^2-1}\sqrt{2x^2-1}}{x^3\left(x^2-1\right)^2}$$

Ejemplo 49. $x\cdot arc\cdot tan2x - \dfrac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right) = f(x)$

Solución:

$$1\cdot arc\cdot tan2x + x\cdot\frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{8x}{1+4x^2} = \quad\Rightarrow f'(x) = arc\cdot tan2x$$

$$arctan2x + \frac{2x}{1+4x^2} - \frac{2x}{1+4x^2} = f'(x)$$

Ejemplo 50. $y = \dfrac{(x^2-3)^4.sen^3(4x^2)}{(5x^6-7x^2+2)^3.cos^2(3x^2-1)}$: Aplique las propiedades de los logaritmos.

Solución: Antepongo log. Natural en ambas partes: . $ln\, y = ln\dfrac{(x^2-3)^4.sen^3(4x^2)}{(5x^6-7x^2+2)^3.cos^2(3x^2-1)}$

$$\ln y = 4\ln\left(x^2-3\right) + 3\ln \operatorname{sen}\left(4x^2\right) - 3\ln\left(5x^6-7x^2+2\right) - 2\ln\cos\left(3x^2-1\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{4\times 2x}{x^2-3} + \frac{3\cos\left(4x^2\right)8x}{\operatorname{sen}\left(4x^2\right)} - \frac{3\left(30x^5-14x\right)}{5x^6-7x^2+2} - \frac{2\left(-\operatorname{sen}\left(3x^2-1\right)\left(6x\right)\right)}{\cos\left(3x^2-1\right)}$$

$$y' = \left[\frac{8x}{x^2-3} + 24x\cdot\cot\left(4x^2\right) - \frac{6x\left(15x^4-7\right)}{5x^6-7x^2+2} + 12x\cdot tan\left(3x^2-1\right)\right]\times y$$

Ejemplo 51. $f(x) = 4sen^{-1}\dfrac{1}{2}x + x\sqrt{4-x^2}$

Solución:

$$f'(x) = \frac{4\times \frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} + 1\cdot\sqrt{4-x^2} + x\cdot\frac{1}{2}\left(4-x^2\right)^{-1/2}\left(-2x\right)$$

$$f'(x)=\frac{2/1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}+\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}+\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{4+4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{8-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{2\left(4-x^2\right)}{\sqrt{4-x^2}}=2\sqrt{4-x^2}=f'(x)$$

Ejemplo 52. $4y^2\cdot\cos^3\left(5x^2\right)=4\cdot sen^6\left(\sqrt{4x^2-1}\right)$

Solución: $8yy'\cos^3\left(5x^2\right)+4y^2\cdot 3\cos^2\left(5x^2\right)\left(-sen\left(5x^2\right)\right)\cdot 10x=$

$$24sen^5\sqrt{4x^2-1}\cdot\cos\sqrt{4x^2-1}\cdot\frac{1}{2}\left(4x^2-1\right)^{-1/2}(8x)$$

$$8yy'\cos^3\left(5x^2\right)-120xy^2\cos^2\left(5x^2\right)\text{sen}\left(5x^2\right)=(96x\,\text{sen}^5\sqrt{4x^2-1}\cos\sqrt{4x^2-1})/\sqrt{4x^2-1}$$

$$8yy'\sqrt{4x^2-1}\cos^3\left(5x^2\right)-120xy^2\sqrt{4x^2-1}\cos^2\left(5x^2\right)\text{sen}\left(5x^2\right)=96x\,\text{sen}^5\sqrt{4x^2-1}\cos\sqrt{4x^2-1}$$

$$y'=\frac{96xsen^5\sqrt{4x^2-1}\cos\sqrt{4x^2-1}+120xy^2\sqrt{4x^2-1}\cos^2\left(5x^2\right)sen\left(5x^2\right)}{8y\sqrt{4x^2-1}\cos^3\left(5x^2\right)}$$

Ejemplo 53. $G(x)=x\cdot\cot^{-1}x+\ln\sqrt{1+x^2}$

Solución:

$$G'(x)=1\cdot\cot^{-1}x-\frac{1}{1+x^2}\cdot x+\frac{\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-1/2}(2x)}{\left(1+x^2\right)^{1/2}}$$

$$=\cot^{-1}x-\frac{x}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2}=\cot^{-1}x=G'(x)$$

Ejemplo 54. $2\ln\left[\cos^6 5x^2\right]=4y\cdot\tan e^{\sqrt{x^2-1}}$

Solución: $12\ln\left(\cos 5x^2\right)=4y\cdot tane^{\sqrt{x^2-1}}$

$$\Rightarrow\frac{12\left(-\text{sen}\,5x^2\right)(10x)}{\cos 5x^2}=\underbrace{4y'}\underbrace{tane^{\sqrt{x^2-1}}}+\sec^2 e^{\sqrt{x^2-1}}\cdot e^{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)^{-1/2}(2x)\underbrace{4y}$$

$$\Rightarrow 4y'tane^{\sqrt{x^2-1}}+\frac{4xye^{\sqrt{x^2-1}}\sec^2 e^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}=-120x.tan5x^2$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-120x\sqrt{x^2-1}\cdot tan5x^2-4xye^{\sqrt{x^2-1}}\cdot\sec^2 e^{\sqrt{x^2-1}}}{4\sqrt{x^2-1}\cdot tane^{\sqrt{x^2-1}}}$$

Ejemplo 55. $\ln\left(sen^2x\right)=e^x+\cot^{-1}y$

Solución: $\dfrac{2sen3x\cdot\cos 3x\cdot 3}{sen^2 3x}=e^x-\dfrac{y'}{1+y^2}$

$$6\cot 3x=e^x-\frac{y'}{1+y^2}\Rightarrow\frac{y'}{1+y^2}=e^x-6\cot 3x\Rightarrow y'=\left(e^x-6\cot 3x\right)\left(1+y^2\right)$$

Ejemplo 56. $y=5\cos^3\sqrt{4x^2-1}$

Solución: $y'=15\cos^2\sqrt{4x^2-1}\left(-sen\sqrt{4x^2-1}\right)\dfrac{1}{2}\left(4x^2-1\right)^{-1/2}(8x)$

$$y'=\frac{-60x\cdot\cos^2\sqrt{4x^2-1}\cdot sen\sqrt{4x^2-1}}{\sqrt{4x^2-1}}$$

Ejemplo 57. $y=\dfrac{\left(4x^2-3\right)^5\cdot x^5}{\left(x^3-1\right)\cdot e^{4x^2-3}}$ Aplique las propiedades de los logaritmos.

Solución: $lny=5.ln(4x^2-3)+5.lnx-ln(x^3-1)-(4x^2-3).lne$

$$\frac{y'}{y}=\frac{5\times 8x}{4x^2-3}+\frac{5}{x}-\frac{3x^2}{x^3-1}-8x\Rightarrow y'=\left(\frac{40x}{4x^2-3}+\frac{5}{x}-\frac{3x^2}{x^3-1}-8x\right)\times y$$

Ejemplo 58. $y=(x-2)^{(x+1)}$

Solución: $\ln y=\ln(x-2)^{(x+1)}\Rightarrow\ln y=(x+1)\cdot\ln(x-2)$

$$\frac{y'}{y}=1\cdot\ln(x-2)+(x+1)\cdot\frac{1}{x-2}\Rightarrow y'=\left[\ln(x-2)+\frac{x+1}{x-2}\right].y$$

Ejemplo 59. $y=\left(\tan x+\tan^{-1}x\right)^4$

Solución: $y'=4\left(\tan x+\tan^{-1}x\right)^3\left(\sec^2 x+\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

Ejemplo 60. $yx+1=e^{xy}$

Solución: $y'x+y=e^{xy}\left(y'x+y\right)\Rightarrow y'x+y=y'xe^{xy}+ye^{xy}$

$$\Rightarrow y'x-y'x.e^{xy}=ye^{xy}-y\Rightarrow y'x\left(1-e^{xy}\right)=-y\left(1-e^{xy}\right)\Rightarrow y'=-y/x$$

Ejemplo 61. $y=e^{-x^2}.\cot x^2$

Solución: $y'=e^{-x^2}(-2x)\cot x^2+e^{-x^2}\left(-\csc^2 x^2\right)(2x)$

$$y'=-2xe^{-x^2}\left(\cot x^2+\csc^2 x^2\right)$$

Ejemplo 62. $y=\left(1+\sqrt{x}\right)^e$

Solución: $y' = e\left(1+\sqrt{x}\right)^{\ell-1}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) \Rightarrow y' = \frac{\ell\left(1+\sqrt{x}\right)^{\ell-1}}{2\sqrt{x}}$

<u>**Ejemplo 63.**</u> $y = \left(\tan x\right)^{\arctan x}$

Solución: $\ln y = \ln\left(\tan x\right)^{\arctan x} \Rightarrow \ln y = \underbrace{\arctan x}\cdot\underbrace{\ln\left(\tan x\right)}$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}\cdot\underbrace{\ln\left(\tan x\right)} + \underbrace{\arctan x}\cdot\frac{\sec^2 x}{\underbrace{\tan x}}$$

$$y' = \left[\frac{\left[\ln\left(\tan x\right)\right]}{1+x^2} + \frac{\sec^2 x\cdot\arctan x}{\tan x}\right]\left(\tan x\right)^{\arctan x}$$

<u>**Ejemplo 64.**</u> $y = \ln\frac{\ell^x}{1+\ell^x}$

Solución: $y = \ln e^x - \ln\left(1+e^x\right) \Rightarrow y = x\cdot\ln e - \ln\left(1+e^x\right)$

$$y = x - \ln\left(1+e^x\right) \Rightarrow y' = 1 - \frac{\ell^x}{1+\ell^x} = \frac{1+\ell^x-\ell^x}{1+\ell^x} \Rightarrow y' = \frac{1}{1+\ell^x}$$

<u>**Ejemplo 65.**</u> $y = x^{2x+1}$

Solución: $\ln y = \ln x^{2x+1} \Rightarrow \ln y = \left(2x+1\right)\cdot\ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2\cdot\ln x + \left(2x+1\right)\frac{1}{x}$

$$y' = \left(2\cdot\ln x + \frac{2x+1}{x}\right)x^{2x+1}$$

<u>**Ejemplo 66.**</u> $\cos x^2 = x\cdot e^y$

Solución: $-senx^2\cdot 2x = 1\cdot e^y + x\cdot e^y y' \Rightarrow -2x\cdot senx^2\cdot e^y = xe^y y'$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2xsenx^2 - \ell^y}{x\ell^y}$$

<u>**Ejemplo 67.**</u> $f\left(x\right) = \frac{1}{3}\left(x\sqrt{1-x^2} + arcsenx\right)$

Solución: $f'\left(x\right) = \frac{1}{2}\left(1\cdot\sqrt{1-x^2} + x\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-1/2}\left(-2x\right) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$$f'\left(x\right) = \frac{1}{2}\left(1\cdot\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2-x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^{1/2}}\right)=\left(1-x^2\right)^{1/2}\Rightarrow f'(x)=\sqrt{1-x^2}$$

:

Ejemplo 68. $f(x)=\sqrt{\ln\frac{1+x}{1-x}}$

Solución: $f(x)=\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)^{1/2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)^{-1/2}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{(-1)}{1-x}\right)$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\ln\frac{1+x}{1-x}}}\left[\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}\right]=\frac{1}{2\sqrt{\ln\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{2}{1-x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\left(1-x^2\right)\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}}$$

Ejemplo 69. $\underbrace{e^{\operatorname{sen}^2\left(3x^2\right)}}\cdot\underbrace{\ln\left(x^2+\cos 4x^2\right)}=\cos\left(x^2\cdot y^3\right)$

Solución: $\underbrace{e^{\operatorname{sen}^2\left(3x^2\right)}.2\operatorname{sen}\left(3x^2\right)\cdot\cos\left(3x^2\right)\cdot 6x}\cdot\underbrace{\ln\left(x^2+\cos 4x^2\right)}+$

$$\underbrace{e^{\operatorname{sen}^2\left(3x^2\right)}}.\underbrace{\frac{2x-sen4x^2\cdot 8x}{x^2+\cos 4x^2}}=-\operatorname{sen}\left(x^2.y^3\right)\cdot\left(2xy^3+x^2\cdot 3y^2y'\right)$$

$$\Rightarrow e^{\operatorname{sen}^2\left(3x^2\right)}\left[12x\cdot\operatorname{sen}\left(3x^2\right)\cdot\cos\left(3x^2\right)\ln\left(x^2+\cos 4x^2\right)+\frac{2x-8x\operatorname{sen}4x^2}{x^2+\cos 4x^2}\right]=$$

$$-2xy^3sen\left(x^2y^3\right)-3x^2y^2y'sen\left(x^2y^3\right)$$

$$y'=\frac{-2xy^3\operatorname{sen}\left(x^2y^3\right)-\ell^{\operatorname{sen}^2\left(3x^2\right)}\left[12x\cdot\operatorname{sen}\left(3x^2\right)\cos\left(3x^2\right)\ln\left(x^2+\cos 4x^2\right)+\frac{2x-8x\operatorname{sen}4x}{x^2+\cos 4x^2}\right]}{3x^2y^2\operatorname{sen}\left(x^2y^3\right)}$$

Ejemplo 70. Encontrar una ecuación de la recta normal a la curva $y=\frac{2}{\left(x^2-2x-4\right)^2}$ en el punto (3,2)

Solución: $y=2\left(x^2-2x-4\right)^{-2}\Rightarrow y'=-4\left(x^2-2x-4\right)^{-3}(2x-2)$

$$y' = \frac{-4_{\times}2(x-1)}{(x^2-2x-4)^3} = \frac{-8(x-1)}{(x^2-2x-4)^3} = m(x)$$

$$m(3) = \frac{-8(2)}{(9-6-4)^3} = \frac{-16}{(-1)^3} = \underbrace{16 = m_T}_{} \Rightarrow \underbrace{m_N = -1/16}_{}$$

Pendiente de la recta tangente Pendiente de la recta normal

$\boxed{y\text{-}y_1 = m(x\text{-}x_1)}$ $\left.\begin{matrix} m = -1/16 \\ P(3,2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow y-2 = -\frac{1}{16}(x-3)$

$$\Rightarrow 16y - 32 = -x + 3 \Rightarrow x + 16y - 35 = 0$$

Ejemplo 71. Encontrar una ecuación para cada una de las rectas tangentes a la curva $3y = x^3 - 3x^2 + 6x + 4$ (3), que sean paralelas a la recta $2x - y + 3 = 0$

Solución: $2x - y + 3 = 0$ $\qquad$ $3y = x^3 - 3x^2 + 6x + 4$

$2x + 3 = y \rightarrow m = 2\ (1)$ $\qquad$ $3y' = 3x^2 - 6x + 6$

$$\div 3 \rightarrow y' = x^2 - 2x + 2 = m(x) \quad (2)$$

$$(1) = (2) \rightarrow 2 = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow 0 = x^2 - 2x \Rightarrow \quad 0 = x(x - 2)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

$x_1 = 0$ en (3) $\rightarrow 3y = 4 \Rightarrow y_1 = 4/3$

$x_2 = 2$ en (3) $\rightarrow 3y = 8 - 12 + 12 + 4 \Rightarrow y_2 = \frac{12}{3} = 4$

$\left.\begin{matrix} P_1(0,4/3) \\ m = 2 \end{matrix}\right] y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{4}{3} = 2(x + 0) \Rightarrow \frac{3y - 4 = 6x}{3}$

$$0 = 6x - 3y + 4$$

$\left.\begin{matrix} P_2(2,4) \\ m = 2 \end{matrix}\right] y - 4 = 2(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 2x - 4 \Rightarrow 0 = 2x - y$

Ejemplo 72. Encontrar una ecuación de la recta normal a la curva $y = x.\sqrt{16 + x^2}$ en el origen.

Solución: $y = x(16 + x^2)^{1/2} \Rightarrow y' = 1.(16 + x^2)^{1/2} + \frac{1}{2}(16 + x^2)^{-1/2}(2x)x$

$$y' = \mathrm{m(x)} = \sqrt{16+\mathrm{x}^2} + \frac{x^2}{\sqrt{16+\mathrm{x}^2}} = \frac{16+\mathrm{x}^2+x^2}{\sqrt{16+\mathrm{x}^2}} = \frac{16+2\mathrm{x}^2}{\sqrt{16+\mathrm{x}^2}}$$

$$m(0) = \frac{16+0}{\sqrt{16+0}} = \frac{16}{4} = 4 = \mathrm{m_T} \Rightarrow m_N = -1/4$$

$$\left.\begin{array}{l} m_N = -1/4 \\ P(0,0) \end{array}\right] y - y_1 = \mathrm{m(x - x_1)} \Rightarrow \begin{array}{c} y - 0 = -\frac{1}{4}(x-0) \\ 4\mathrm{y} = -\mathrm{x} \Rightarrow \mathrm{x} + 4\mathrm{y} = 0 \end{array}$$

Ejemplo 73. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes horizontales a la curva $\mathrm{y} = \mathrm{x}^3 + 4x^2 - 5x \quad (1)$

Solución: $y' = 3\mathrm{x}^2 + 8x - 5 = 0 \Rightarrow \mathrm{x} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64-4(3)(-5)}}{2(3)} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{124}}{6}$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{124}}{6} \Rightarrow \quad \mathrm{x_1} = \frac{-8+11.1}{6} = 0.52; \quad \mathrm{x_2} = \frac{-8-11.1}{6} = -3.18$$

$$\mathrm{x_1} = 0{,}52 \text{ en } (1) \rightarrow \mathrm{y} = (0{,}52)^3 + 4(0{,}52)^2 - 5(0{,}52) = 3{,}82 \Rightarrow \mathrm{y} = 1{,}38$$

$$\mathrm{x_1} = -3{,}18 \text{ en } (1) \rightarrow \mathrm{y} = (-3{,}18)^3 + 4(-3{,}18)^2 - 5(-3{,}18) = 24{,}19 \Rightarrow \mathrm{y} = 24{,}19$$

Ejemplo 74. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes la curva $x^2 + y^2 = 25$, en el punto (4 , -3)

Solución: $2x + 2y.y' = 0 \Rightarrow \mathrm{y'} = -\dfrac{2\mathrm{x}}{2y} \Rightarrow m(x,y) = -\dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} \Rightarrow m(4,-3) = \dfrac{-4}{-3} = 4/3$

$$\boxed{y - y_1 = \mathrm{m(x - x_1)}}$$

$$\Rightarrow y + 3 = \frac{4}{3}(x-4) \Rightarrow 3y + 9 = 4\mathrm{x} - 16 \Rightarrow 0 = 4\mathrm{x} - 3\mathrm{y} - 25$$

Ejemplo 75. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \mathrm{sen(xy)}$ en el punto $\mathrm{B}\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.

Solución: $y' = \cos(\mathrm{xy})(\mathrm{y} + \mathrm{xy'}) \Rightarrow \mathrm{y'} = \mathrm{y}\cos(\mathrm{xy}) + \mathrm{xy'}\cos(\mathrm{xy})$

$$y' - \mathrm{xy'}\cos(\mathrm{xy}) = \mathrm{y}\cos(\mathrm{xy}) \Rightarrow \mathrm{y'}(1 - \mathrm{x}\cos(\mathrm{xy})) = \mathrm{y.}\cos(\mathrm{xy})$$

$$\mathrm{y'} = \mathrm{m(x,y)} = \frac{\mathrm{y.}\cos(\mathrm{xy})}{1 - x.\cos(xy)} \Rightarrow m\left(\frac{\pi}{2},1\right) = \frac{1.\cos(\pi/2)}{1 - \frac{\pi}{2}.\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1-0} = 0 = \mathrm{m}$$

$$\text{Ec.} \rightarrow \ \mathrm{y - y_1 = m(x - x_1)} \ \Rightarrow \mathrm{y} - 1 = 0\left(\mathrm{x} - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = 1$$

https://www.youtube.com/watch?v=1652maJKaQM&feature=emb_logo

5.9. EJERCICIOS PROPUESTOS SOBRE DERIVADAS

Ejemplo. Encuentre la primera deriva y simplifique lo máximo en los siguientes ejercicios:

$\boldsymbol{a}.\ y = 5$	$\boldsymbol{b}.\ f(x) = 4x^6$
$\boldsymbol{c}.\ f(x) = 5x^7 + 8a^2$	$\boldsymbol{d}.\ f(a) = 5x^7 + 8a^2$
$\boldsymbol{e}.\ f(x) = \dfrac{5x^5 - 8x^3 + 4x - 6x^4 - 4}{2x^4}$	$\boldsymbol{f}.\ g(x) = 5x^3(5x^2 + 7x - 4)$
$\boldsymbol{g}.\ h(x) = 5\sqrt[3]{x^4}$	$\boldsymbol{h}.\ f(x) = \dfrac{5x^3}{2x^4 - 8}$
$\boldsymbol{i}.\ f(x) = 5(x^3 - 5x^2 + 8)^4$	$\boldsymbol{j}.\ f(x) = (x - 2)^5(3x + 6)^4$
$\boldsymbol{k}.\ f(x) = 5\sqrt[3]{(x^4 - 2x^3 + 5)^2}$	$\boldsymbol{l}.\ f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{(x^3 - a^2)^3}{(x^3 + b^2)^4}}$
$\boldsymbol{m}.\ f(x) = 2.sen(5x^2)$	$\boldsymbol{n}.\ g(x) = -5.cot(4x^3 - 8)$
$\boldsymbol{o}.\ h(x) = 3.sec(4x^5 - 2x^2 + 6)$	$\boldsymbol{p}.\ k(x) = 5.cos(\pi/3)$
$\boldsymbol{q}.\ f(x) = 7.csc^4(5x^2 - b^2)$	$\boldsymbol{r}.\ f(x) = ln(5x^3)$
$\boldsymbol{s}.\ f(x) = ln\sqrt[5]{\dfrac{(x^2 - a^3)^4.(5x^3 + b)^3}{(x^7 + b^2)^6.(x^5 + a^2)^2}}$	$\boldsymbol{t}.\ f(x) = log_3(5x^4 + b^2)$
$\boldsymbol{u}.\ g(x) = 2.e^{\left(4x^2 + tan(6x^3)\right)}$	$\boldsymbol{v}.\ h(x) = 5^{\left(6x^3 + cos(3x^2 - 6)\right)}$
$\boldsymbol{w}.\ k(x) = 2.arc.cos(4x^3 - a^2)$	$\boldsymbol{x}.\ k(x) = 5.arc.tan\left(5x^6 - cos(7x^2)\right)$
$\boldsymbol{y}.\ f(x) = arc.csc(5x^3 + 5)$	***z.*** $y = (5x^3 + 2)^{6x^5 - 8}$
a.a. $3x^2y^3 - cos(5x^4) = tan(y^3) + 6x^3y^5$	

https://www.youtube.com/watch?time_continue=9&v=-ryKFsvKG4s

https://www.youtube.com/watch?v=GqXVdPcm4m8

https://www.youtube.com/watch?v=7Y-cRErb_9k

https://www.youtube.com/watch?v=S4Knd3DAM4A

https://www.youtube.com/watch?v=HHlIXGlilxk

https://www.youtube.com/watch?v=q7rEEUHI8U0

https://www.youtube.com/watch?v=vDPLvnrDFxI

https://www.youtube.com/watch?v=_pm66O0Qjf0

https://www.youtube.com/watch?v=FbWKDhwI-i8

Encuentre las derivadas de las funciones dadas:

1. $f(t) = (2t^2 - 6t + 1)^{-8}$ R/ $f'(t) = \dfrac{-16(2t-3)}{(2t^2-6t+1)^9}$

2.. $y = (2x-5)^4(8x^2-5)^{-3}$ R/ $y' = \dfrac{8(2x-5)^3(-4x^2+30x-5)}{(8x^2-5)^4}$

3. $y = \cos(x^3)$ R/ $y' = -3x^2\,\text{sen}(x^3)$

4. $y = \cos(tanx)$ R/ $y' = -\text{sen}(tanx)\sec^2 x$

5. $y = \sec^2 2x - tan^2 2x$ R/ $y' = 0$

6. $y = tan^2(x^3)$ R/ $y' = 6x^2 tan(x^3)\sec^2(x^3)$

7. $y = \cos^2\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ R/ $y' = \text{sen}\left[2(1-\sqrt{x})/(1+\sqrt{x})\right]/\left[\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2\right]$

8. $y = \cos^2(\cos x) + \text{sen}^2(\cos x)$ R/ $y' = 0$

9. $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ R/ $y' = \left[1 + 1/(2\sqrt{x})\right]/(2\sqrt{x+\sqrt{x}})$

10. $P(t) = \left[\left(1+\dfrac{2}{t}\right)^{-1} + 3t\right]^{-2}$ R/ $P'(t) = -2\left[(1+2/t)^{-1} + 3t\right]^{-3}\left[2(t+2)^{-2} + 3\right]$

11. $x^2 - xy + y^3 = 8$ R/ $y' = (y-2x)/(3y^2 - x)$

12. $2y^2 + \sqrt[3]{xy} = 3x^2 + 17$ R/ $y' = (18x - x^{-2/3}y^{1/3})/(12y + x^{1/3}y^{-2/3})$

13. $x^4 + y^4 = 16$ R/ $y' = -x^3/y^3$

14. $2xy = (x^2+y^2)^{3/2}$ R/ $y' = (3x\sqrt{x^2+y^2} - 2y)/(2x - 3y\sqrt{x^2+y^2})$

15. $\dfrac{y}{x-y} = x^2 + 1$ R/ $y' = (y/x) + 2(x-y)^2$

16. $\cos(x-y) = y\,\text{sen}\,x$ R/ $y' = \left[\text{sen}(x-y) + y\cos x\right]/\left[\text{sen}(x-y) - \text{sen}\,x\right]$

17. $xy = \cot(xy)$ R/ $y' = -y/x$

Considere a "y" como la variable independiente y a "y" como la variable dependiente aplique la derivación implícita para encontrar dx/dy.

18. $y^4 + x^2y^2 + yx^4 = y + 1$ R/ $\dfrac{dx}{dy} = (1 - 4y^3 - 2x^2y - x^4)/(2xy^2 + 4yx^3)$

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

19. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1, \quad (-5, \frac{9}{4})$ (Hipérbola). R/ $5x+4y+16=0$

20. $y^2 = x^3(2-x), \quad (1,1)$ R/ $y = x$

21. $2(x^2+y^2)^2 = 25(x^2-y^2), \quad (3,1)$ R/ $9x+13y-40=0$

Encuentre las derivadas primera y segunda de la función dada:

22. $f(x) = x^4-3x^3+16x$ R/ $f'(x) = 4x^3-9x^2+16, \quad f''(x) = 12x^2-18x$

23. $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ R/ $h'(x) = x/\sqrt{x^2+1}, \quad h''(x) = 1/(x^2+1)^{3/2}$

24. $F(s) = (3s+5)^8$ R/ $F'(s) = 24(3s+5)^7, \quad F''(s) = 504(3s+5)^6$

25. $y = \frac{x}{1-x}$ R/ $y' = 1/(1-x)^2, \quad y'' = 2/(1-x)^3$

26. $y = (1-x^2)^{3/4}$ R/ $y' = -\frac{3}{2}x(1-x^2)^{-1/4}, \quad y'' = \frac{3}{4}(1-x^2)^{-5/4}(x^2-2)$

27. $H(t) = tan^3(2t-1)$ R/ $H'(t) = 6tan^2(2t-1)\sec^2(2t-1)$

$$H''(t) = 24tan(2t-1)\sec^4(2t-1) + 24tan^3(2t-1).\sec^2(2t-1)$$

Encuentre y’’’.

28. $y = ax^2+bx+c$ R/ $y''' = 0$

29. $y = \sqrt{5t-1}$ R/ $y''' = \frac{375}{8}(5t-1)^{-5/2}$

Obtenga la derivada de las funciones dadas:

30. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ R/ $f'(x) = e^{\sqrt{x}}/(2\sqrt{x})$

31. $y = xe^{2x}$ R/ $y' = e^{2x}(2x+1)$

32. $y = e^{x\cos x}$ R/ $y' = e^{x\cos x}(\cos x - x\,\mathrm{sen}\, x)$

33. $y = tan(e^{3x-2})$ R/ $y' = 3e^{3x-2}\sec^2(e^{3x-2})$

34. $y = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$ R/ $y' = (3e^{3x}+2e^{4x})/(1+e^x)^2$

35. $y = x^e$ R/ $y' = ex^{e-1}$

36. $f(x)=\ln(x+1)$ R/ $f'(x)=1/(x+1)$

37. $f(x)=\ln(\cos x)$ R/ $f'(x)=-tanx$

38. $f(x)=\ln(2-x-x^2)$ R/ $f'(x)=(-1-2x)/(2-x-x^2)$

39. $f(x)=x^2\ln(1-x^2)$ R/ $f'(x)=2x\ln(1-x^2)-2x^3/(1-x^2)$

40. $f(x)=\log_3(x^2-4)$ R/ $f'(x)=(\log_3 e)2x/(x^2-4)$

41. $y=x\ln x$ R/ $y'=1+\ln x$

42. $y=\log_{10}x$ R/ $y'=1/(x\ln 10)$

43. $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ R/ $f'(x)=(2+\ln x)/(2\sqrt{x})$

44. $g(x)=\ln\dfrac{a-x}{a+x}$ R/ $g'(x)=-2a/(a^2-x^2)$

45. $F(x)=\ln\sqrt{x}$ R/ $F'(x)=1/(2x)$

46. $f(t)=\log_2(t^4-t^2+1)$ R/ $f'(t)=(\log_2 e)(4t^3-2t)/(t^4-t^2+1)$

47. $h(y)=\ln(y^3\operatorname{sen} y)$ R/ $h'(y)=(3/y)+\cot y$

48. $g(u)=\dfrac{1-\ln u}{1+\ln u}$ R/ $g'(u)=-2/\left[u(1+\ln u)^2\right]$

49. $y=(\ln\operatorname{sen} x)^3$ R/ $y'=3\cot x(\ln\operatorname{sen} x)^2$

50. $y=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$ R/$y'=\left[1+x^2(1-2\ln x)\right]/\left[x(1+x^2)^2\right]$

51. $y=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{3/5}$ R/ $y'=-6/\left[5(x^2-1)\right]$

52. $y=\ln\left|x^3-x^2\right|$ R/ $y'=(3x-2)/\left[x(x-1)\right]$

53. $F(x)=e^x\ln x$ R/ $F'(x)=e^x(\ln x+1/x)$

54. $G(x)=tan^{-1}(x^3)$ R/ $G'(x)=3x^2/(1+x^6)$

55. $y=\operatorname{sen}^{-1}(x^2)$ R/ $y'=2x/\sqrt{1-x^4}$

56. $F(x)=tan^{-1}(x/a)$ R/ $F'(x)=a/(a^2+x^2)$

57. $H(x)=(1+x^2)arctanx$ R/ $H'(x)=1+2xarctanx$

58. $g(t)=\operatorname{sen}^{-1}(4/t)$ R/ $g'(t)=-4/\sqrt{t^4-16t^2}$

59.$G(t)=\cos^{-1}\sqrt{2t-1}$ R/ $G(t)=-1/\sqrt{2(-2t^2+3t-1}$

60.$y=\sec^{-1}\sqrt{1+x^2}$ R/ $y'=x/\left[|x|(1+x^2)\right]$

61.$y=tan^{-1}(\operatorname{sen}x)$ R/ $y'=\cos x/(1+\operatorname{sen}^2 x)$

62.$y=(\operatorname{sen}^{-1}x)/\cos^{-1}x$ R/ $y'=\pi\left[2\sqrt{1-x^2}(\cos^{-1}x)^2\right]$

63.$y=(tan^{-1}x)^{-1}$ R/ $y'=-1/\left[(1+x^2)(tan^{-1}x)^2\right]$

64.$y=x^2\cot^{-1}(3x)$ R/ $y'=2x\cot^{-1}3x-3x^2/(1+9x^2)$

65.$y=ar\cos\left(\dfrac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right)$ R/ $y'=\sqrt{a^2-b^2}/(a+b\cos x)$

66.$g(x)\operatorname{sen}^{-1}(3x+1)$ R/ $g'(x)=3/\sqrt{-9x^2-6x}$

67.$S(x)=\operatorname{sen}^{-1}(tan^{-1}x)$ R/ $S'(x)=1/\left[(1+x^2)\sqrt{1-(tan^{-1}x)^2}\right]$

68.$G(x)=\sqrt{\csc^{-1}x}$ R/ $G'(x)=-1/\left[2x\sqrt{(x^2-1)}\csc^{-1}x\right]$

69.$U(t)=2^{arctant}$ R/ $U'(t)=2^{arctant}(\ln 2)/(1+t^2)$

70.*Si* $g(x)=x\operatorname{sen}^{-1}(x/4)+\sqrt{16-x^2}$, *encuentre* $g'(2)$. R/ $g'(2)=\pi/6$

71.$f(x)=tanh3x$ R/ $f'(x)=3\sec h^2 3x$

72.$h(x)=\cosh(x^4)$ R/ $h'(x)=4x^3\operatorname{senh}(x^4)$

73.$G(x)=x^2\sec hx$ R/ $G'(x)=2x\sec hx-x^2\sec hx.tanhx$

74.$H(t)=tanh(e^t)$ R/ $H'(t)=e^t\sec h^2(e^t)$

75.$y=x^{\cosh x}$ R/ $y'=x^{\cosh x}\left[\operatorname{senh}x.\ln x+(\cosh x)/x\right]$

5.10. MOVIMIENTO RECTILÍNEO

EJEMPLO 1 Posición de una partícula en movimiento

Una partícula se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = -t^2 + 4t + 3$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. ¿Cuál es la posición de la partícula a 0, 2 y 6 segundos?

Solución Al sustituir en la función posición obtenemos

$$s(0) = 3, \quad s(2) = 7, \quad s(6) = -9.$$

Como se muestra en la FIGURA 4.1.1, $s(6) = -9 < 0$ significa que la posición de la partícula está a la izquierda del punto de referencia $s = 0$.

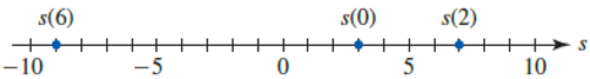


FIGURA 4.1.1 Posición de una partícula en varios instantes en el ejemplo 1 ■

Si observamos, $s(t) = -t^2 + 4t + 3$
Es una función cuadrática cóncava hacia abajo (figura de la derecha) y asemeja un movimiento parabólico de una partícula.

El ejemplo 1 nos dice que la partícula se mueve sobre una recta horizontal, pero si pensamos que es un movimiento parabólico lo entenderemos mejor.

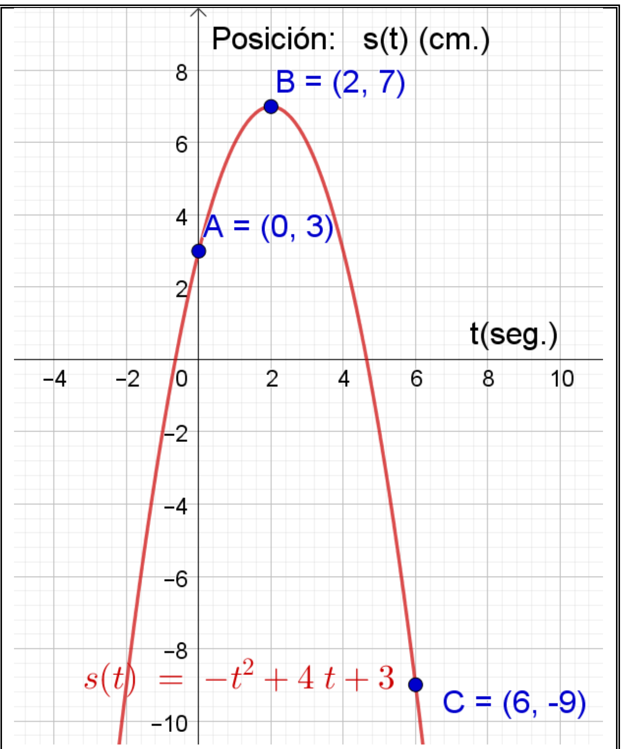


Fig. 1

Velocidad y aceleración Si la **velocidad media** de un cuerpo en movimiento sobre un intervalo de tiempo de longitud Δt es

$$\frac{\text{cambio en posición}}{\text{cambio en tiempo}} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

entonces la razón de cambio instantánea, o velocidad del cuerpo, está dada por

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Así, tenemos la siguiente definición.

Definición 4.1.1 Función velocidad

Si $s(t)$ es una función posición de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su **función velocidad** $v(t)$ en el instante t es

$$v(t) = \frac{ds}{dt}.$$

La **rapidez** del objeto en el instante t es $|v(t)|$.

La velocidad se mide en centímetros por segundo (cm/s), metros por segundo (m/s), pies por segundo (pies/s), kilómetros por hora (km/h), millas por hora (mi/h), etcétera.
También es posible calcular la razón de cambio de la velocidad.

Definición 4.1.2 Función aceleración

Si $v(t)$ es la función velocidad de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su **función aceleración** $a(t)$ en el instante t es

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Las unidades típicas para medir la aceleración son metros por segundo por segundo (m/s^2), pies por segundo por segundo (pies/s^2), millas por hora por hora (mi/h^2), etcétera. A menudo, las unidades de la aceleración se leen literalmente "metros por segundo al cuadrado"

EJEMPLO 2 Otro repaso al ejemplo 1

En el ejemplo 1 las funciones velocidad y aceleración de la partícula son, respectivamente,

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -2t + 4 \qquad \text{y} \qquad a(t) = \frac{dv}{dt} = -2.$$

En los instantes 0, 2 y 6 s, las velocidades son $v(0) = 4$ cm/s, $v(2) = 0$ cm/s y $v(6) = -8$ cm/s, respectivamente.

De igual forma se observa que v(t)= - 2t+4 es una función lineal con pendiente negativa (-2), tal como se observa en la gráfica debajo. De 0 a 2 seg. La velocidad está disminuyendo; mirando la fig. 1 se ve lógico que la partícula mientras sube va	También se observa que a(t)= - 2 es una línea recta horizontal. Su aceleración es -2cm/seg^2. Es decir, cada seg. Su velocidad está disminuyendo en 2 cm/seg.; y cada segundo que pasa la aceleración es la misma (-2cm/seg^2)

disminuyendo su velocidad; y su altura máxima está cuando t=2seg., de ahí en adelante la partícula comienza a bajar, por lo tanto aumenta su velocidad pero se coloca negativamente por ser un vector que cambia su dirección.

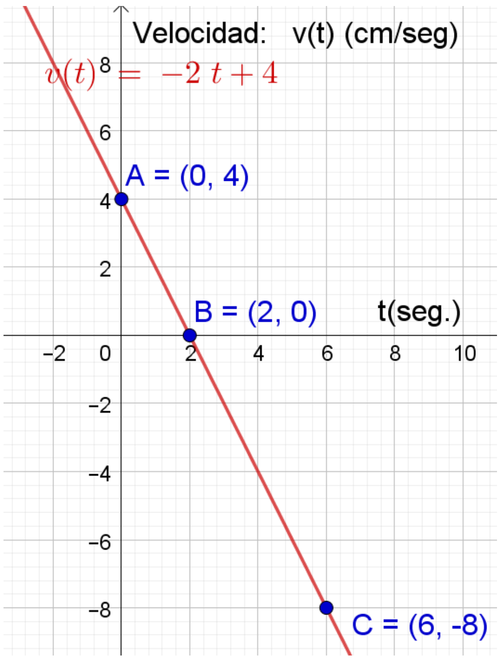


Fig. 2

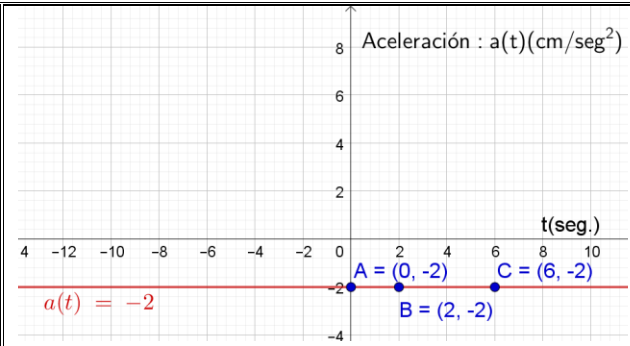


Fig. 3

Ejercicios 4.1

En los problemas 1-8, $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal. Encuentre la posición, velocidad, rapidez y aceleración de la partícula en los instantes indicados.

1. $s(t) = 4t^2 - 6t + 1;\quad t = \frac{1}{2}, t = 3$
2. $s(t) = (2t - 6)^2;\quad t = 1, t = 4$
3. $s(t) = -t^3 + 3t^2 + t;\quad t = -2, t = 2$
4. $s(t) = t^4 - t^3 + t;\quad t = -1, t = 3$
5. $s(t) = t - \frac{1}{t};\quad t = \frac{1}{4}, t = 1$
6. $s(t) = \frac{t}{t+2};\quad t = -1, t = 0$
7. $s(t) = t + \operatorname{sen} \pi t;\quad t = 1, t = \frac{3}{2}$
8. $s(t) = t \cos \pi t;\quad t = \frac{1}{2}, t = 1$

Respuestas:

Ejercicios 4.1, página 195

1. $-1, 19;\quad -2, 18;\quad 2, 18;\quad 8, 8$
3. $18, 6;\quad -23, 1;\quad 23, 1;\quad 18, -6$
5. $-\frac{15}{4}, 0;\quad 17, 2;\quad 17, 2;\quad -128, -2$

En los problemas 9-12, $s(t)$ es una función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal.

9. $s(t) = t^2 - 4t - 5$
   a) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 0$?
   b) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 7$?
10. $s(t) = t^2 + 6t + 10$
   a) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = v(t)$?
   b) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $v(t) = -a(t)$?
11. $s(t) = t^3 - 4t$
   a) ¿Cuál es la aceleración de la partícula cuando $v(t) = 2$?
   b) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $a(t) = 18$?
   c) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $s(t) = 0$?
12. $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8$
   a) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $v(t) = 0$?
   b) ¿Cuál es la posición de la partícula cuando $a(t) = 0$?
   c) ¿Cuándo desacelera la partícula? ¿Cuándo acelera?

Respuestas:

7. $1, \frac{1}{2};\quad 1 - \pi, 1;\quad \pi - 1, 1;\quad 0, \pi^2$
9. *a*) $-6, 6$ *b*) $-8, 8$
11. *a*) $-6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}$ *b*) 15 *c*) $-4, 8$

5.11. LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO.

RAZONES RELACIONADAS

En este numeral veremos algunas aplicaciones en las que la derivada se usa para representar e interpretar las razones en las cuales cambien las cosas en el mundo que nos rodea. Es natural pensar en el cambio en términos de dependencia respecto del tiempo; como la posición, la velocidad y la aceleración de un móvil, pero no es tan necesario ser tan restrictivo. El cambio con respecto a variables distintas del tiempo puede estudiarse de la misma manera (en mercadeo, la relación entre el precio y el volumen de ventas, el área de una superficie geométrica y sus medidas, etc.). Estas preguntas pueden expresarse en términos de la razón de cambio de una función con respecto a una variable.

Movimiento rectilíneo y en caída libre. Desplazamiento, velocidad, rapidez y aceleración. Supóngase que un objeto se mueve a lo largo de una recta coordenada, de modo que conocemos su posición "s" en esa recta como una función del tiempo $s = f(t)$ **.**

La velocidad promedio del objeto en un intervalo de tiempo Δt es:

$$\textbf{Velocidad promedio} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La **velocidad instantánea.** Es la derivada de la función de posición S = f(x) con respecto al tiempo. En el instante t es:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Además de decirnos la rapidez con la que el objeto se mueve, la velocidad también nos dice en qué dirección se mueve. Cuando el objeto se mueve hacia delante ("s" creciente), la velocidad es positiva; cuando el cuerpo se mueve hacia atrás ("s" decrece), la velocidad es negativa.

La rapidez, es el valor absoluto de la derivada. La rapidez mide la razón de progreso hacia delante, sin considerar la dirección.

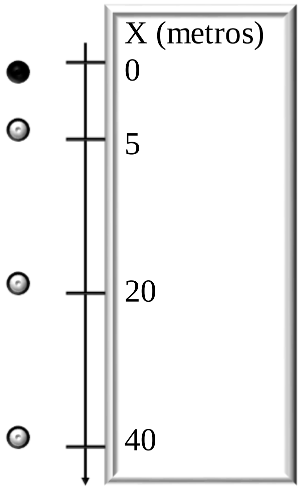
$$Rapidez = |v(t)| = \left| {ds}/{dt} \right|$$

Definición: La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo. Si la posición de un objeto en el instante t es s = f(t), entonces la aceleración del objeto en el instante t es: $.a(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$

Recordemos que la ecuación del movimiento en caída libre de un cuerpo es $s = \frac{1}{2} gt^2$ en donde "g" es la gravedad de la tierra. (9.8 m/seg^2).

Ejemplo 1. Para la figura, se muestra la caída libre de una pesada bola de rodamiento soltada desde el reposo en el instante t = 0.

- Cuantos metros cae la bola en los primeros 2 segundos?
- Cuales son su velocidad, su rapidez y su aceleración en este instante?



Solución: La ecuación métrica de caída es $s = 4.9t^2$. Durante los primeros dos segundos, la bola cae: $s(2) = 4.9.(2)^2 = 19.6mt.$

En cualquier instante, la velocidad es la derivada del desplazamiento:

$v(t) = s'(t) = 9.8t$. En t = 2, la velocidad es v (2) = 9.8 (2) = 19.6 m/s

La aceleración en cualquier instante t es: a(t)= v'(t) = s''(t) = 9.8 m/s^2.

En t = 2s, la aceleración es 9.8 m/s^2.

Ejemplo 2. Una explosión de dinamita lanza una roca directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 150 pies/s. La roca alcanza una altura de s = 160t -16t^{2}pies después de t segundos.

- A qué altura llega la roca?
- Cuales son la velocidad y la rapidez de la roca cuando está a 256 pies sobre el suelo y subiendo? Y bajando?
- Cuál es la aceleración de la roca en cualquier instante t durante su vuelo (Después de la explosión)?
- Cuando llega al suelo otra vez?

Solución.

- En el sistema coordenado elegido, "s" mide la altura del suelo hacia arriba y negativa hacia abajo. El instante en el que la roca está en el punto más alto es aquel cuando la velocidad durante el vuelo es cero. Por lo tanto, para encontrar la altura máxima, todo lo que hay que hacer es encontrar ds/dt e igualar a cero; y evaluar "s" en ese tiempo.

En cualquier instante t, la velocidad es:

$$v = {ds}/{dt} = d(160t - 16t^2)/dt = (160 - 32t)\, pies/s$$

La velocidad es cero cuando v = 0, entonces:

$$160 - 32t = 0 \Rightarrow t = 5seg.$$

La altura de la roca en t = 5 seg. es: s_{max} = s(5) = 160(5) – 16(5)^2 =400 pies.

- Para hallar la velocidad de la roca a 256 pies cuando sube y de nuevo cuando baja, hallamos los dos valores de t para los cuales:

$$s(t) = 160t - 16t^2 = 256 \Rightarrow 16t^2 - 160t + 256 = 0$$

Resolviendo esta ecuación tenemos t = 2 seg. Y t = 8 seg.

La roca está a 256 pies sobre el suelo 2 segundos después de la explosión y de nuevo 8 segundos después de la explosión. Las velocidades de la roca en estos instantes son:

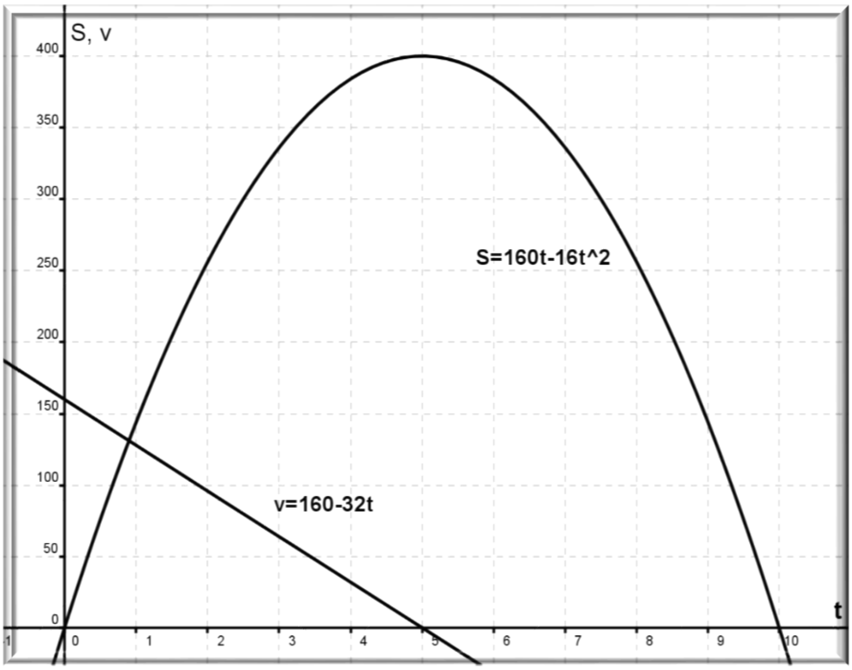
$$v(2) = 160 - 32(2) = 96\, pies/s$$
$$v(8) = 160 - 32(8) = -96\, pies/s$$

En ambos instantes la rapidez de la roca es 96 pies/s.

- En cualquier instante durante su vuelo después de la explosión, la aceleración de la roca es $a(t) = {dv}/{dt} = d(160 - 32t)/dt = -32\, pies/s^2$

La aceleración es siempre hacia abajo. Cuando la roca sube, la frena; cuando cae, la acelera.

- La roca toca el suelo en el instante positivo t para el cual s = 0. la ecuación 160t – 16t^2 = 0 se factoriza como 16t (10-t) =0, así que las soluciones son t = 0 y t = 10. en t = 0 ocurrió la explosión y la roca fue lanzada hacia arriba. Regreso al suelo 10 segundos después. El gráfico del desplazamiento es una parábola, de la siguiente forma:



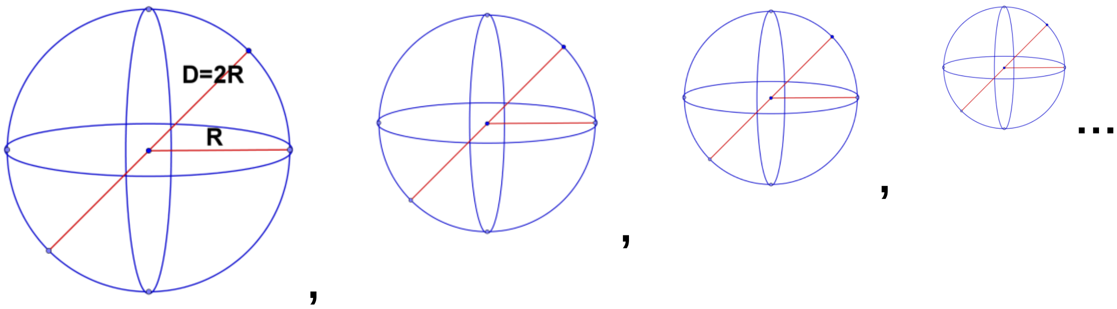
Ejemplo 3. Una bola de nieve esférica se derrite de manera que su volumen disminuye a razón de 1cm³/min. ¿A qué velocidad disminuye el diámetro cuando mide 10 cm?

Solución: Obsérvese que la bola de nieve se derrite a una velocidad constante (Cada minuto su volumen disminuye 1 cm cúbico). Pero esto no quiere decir que su Diámetro también disminuya a una velocidad constante.

Cuando se va a resolver un problema de razón de cambio se deben seguir los siguientes pasos:

Pasos:

1. Hacer una gráfica acorde con el enunciado del problema (siempre que sea posible)



2. Colocar lo que me dicen, ¡qué cambia con respecto al tiempo!, y lo que me piden que halle, ¿cómo cambia con respecto al tiempo?

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{1cm^3}{min.} \\ \left(\dfrac{dD}{dt}\right)_{D=10cm.} = ? \end{cases}$$

3. Hallar una ecuación donde las únicas variables son lo que me dicen qué cambia con respecto al tiempo y lo que me piden que halle ¿cómo cambia con respecto al tiempo? (ecuación matriz)

$$\begin{cases} \overbrace{V_e}^{*} = \dfrac{4}{3}\pi \overbrace{R^3}^{?} \; (1) \\ D = 2R \Rightarrow \dfrac{D}{2} = R \; (2) \end{cases}$$

(2) en (1): $V_e = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{\cancel{4}}{3}\pi\frac{D^3}{\cancel{8}\,2}$

$$V_e = \frac{\pi}{6}D^3 \; (Ecuación\ matriz)$$

4. Derivo la ecuación matriz con respecto al tiempo y despejo lo que me están pidiendo

$$V_e = \frac{\pi}{6}D^3 \quad \Rightarrow 1.\frac{dV}{dt} = 3.\frac{\pi}{6}D^2.\frac{dD}{dt} = \frac{\pi}{2}D^2.\frac{dD}{dt}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2.\frac{dV}{dt}}{\pi.D^2}$$

$$\left(\frac{dD}{dt}\right)_{D=10cm.} = \frac{2*-1}{\pi.10^2} = -0.0064\frac{cm.}{min.}$$

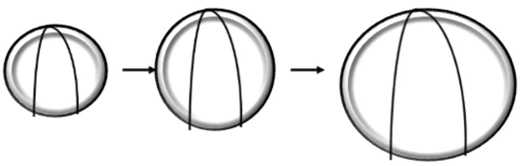
$$Tengamos\ en\ cuenta\ lo\ siguiente: \frac{dD}{dt} = \frac{2.(-1)}{\pi.D^2} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \left(\frac{dD}{dt}\right)_{D=20cm.} = \frac{2*-1}{\pi.20^2} = -0.0015\frac{cm.}{min.} \\ \left(\frac{dD}{dt}\right)_{D=10cm.} = \frac{2*-1}{\pi.10^2} = -0.0064\frac{cm.}{min.} \\ \left(\frac{dD}{dt}\right)_{D=5cm.} = \frac{2*-1}{\pi.5} = -0.025\frac{cm.}{min.} \end{Bmatrix}$$

Se observa que el diámetro está disminuyente de una forma cada vez más rápida

https://www.youtube.com/watch?v=9juEadOqfbA

Ejemplo 4. Se bombea aire en un globo a razón de 4,5 pulgadas cúbicas por minuto. Hallar la razón de cambio del radio cuando éste es de 2 pulgadas.

Solución: $\dfrac{dv}{dt} = 4{,}5''^3 / min$



$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{R=2''} = ?$$

$$v = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi R^2 . \frac{dR}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{dv/dt}{4\pi R^2} = \frac{4,5}{4\pi R^2} \textit{ el radio crece cada vez mas lentamente}$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{R=2''} = \frac{4,5}{4\pi(2)^2} = 0.09''/\,min.$$

Ejemplo 5. Una piedra se deja caer sobre un estanque en reposo y produce ondas circulares concéntricas. El radio **r** de la onda exterior crece al ritmo constante de 1 pie/seg. cuando su radio es de 4 pies, ¿ a qué ritmo está creciendo el área total A de la zona perturbada?.

Solución:

$$\frac{dR}{dt} = 1\text{pie}/seg. \qquad A = \pi R^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi R \frac{dR}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi R \; (1)$$

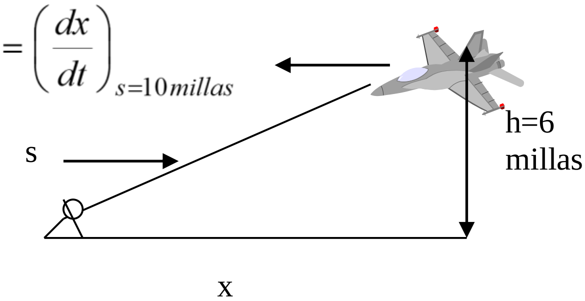
$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{R=4'} = ? \qquad \left(\frac{dA}{dt}\right) = 2\pi \times 4 \times 1 = 25{,}1 \; pies^2 / seg.$$

(Observamos en (1) que el área crece cada vez más rápidamente)

Ejemplo 6. Un avión vuela a 6 millas de altitud horizontalmente, acercándose hacia la posición de un radar. Sea **s** la distancia (en millas) entre avión y radar. Si **s** está decreciendo a razón de 400 millas por hora; cuando **s** es 10 millas, ¿cuál es la velocidad del avión?.

Solución:

$$v = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{s=10\,millas}$$



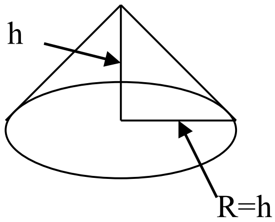
$$v = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{s=10} = ? \;; \qquad \frac{ds}{dt} = -400 \text{ millas / hora;} \qquad S^2 = 6^2 + x^2$$

$$\Rightarrow \quad 2s.\frac{ds}{dt} = 2x.\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{s.ds/dt}{x} = \frac{10(-400)}{8} = -500\,\text{millas}/\text{h}.$$

$$s^2 = 36 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{s^2 - 36} = \sqrt{10^2 - 36} = 8$$

<u>Ejemplo 7.</u> Se arroja arena en un montón cónico a razón de 100 pies cúbicos por minuto. Hallar la razón de cambio de la altura del montón cundo su altura es 10 pies (Supongamos que el radio del cono es igual a su altura).

Solución: $\frac{dv}{dt} = 100\,\text{pies}^3/\text{min}$



$$\left(\frac{dh}{dt}\right)_{h=10\text{pies}} = ?\,;\;\; R = h;$$

$$v = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi h^2 h}{3} = \frac{\pi}{3}h^3.$$

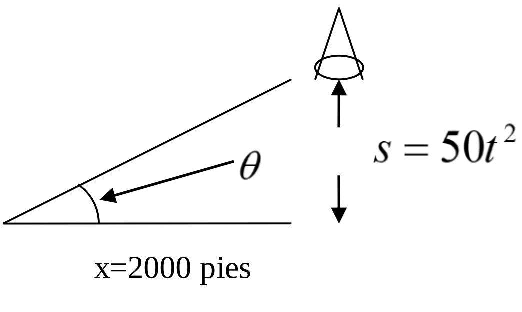
$$\frac{dv}{dt} = \pi h^2\frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{dv/dt}{\pi h^2}$$

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)_{h=10} = \frac{100}{\pi\times 10^2} = \frac{1}{\pi}\,pies/min.$$

https://www.youtube.com/watch?v=yV_a8bQYNWc

<u>Ejemplo 8.</u> Una cámara de televisión sigue desde el suelo el despegue vertical de un cohete, que se produce de acuerdo con una ecuación $s = 50t^2$, con s en pies y t en segundos. La cámara está a 2000 pies del lugar de despegue. Hallar la razón de cambio del ángulo de elevación de la cámara 10 segundos después del despegue.

Solución:



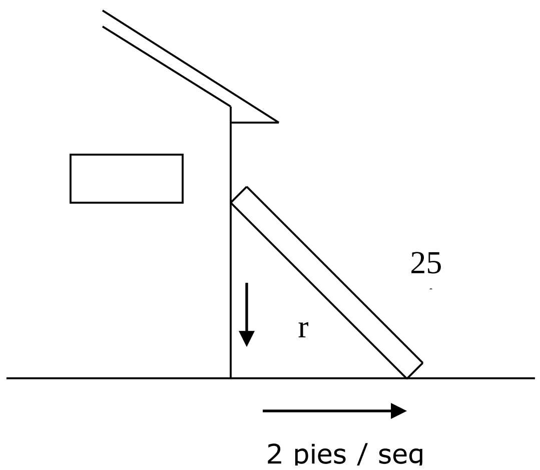
$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=10seg.} = ?\,; \quad tan\theta = \frac{s}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{50t^2}{2000} = \frac{1}{40}t^2 \Rightarrow \sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{2t}{40} \quad \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{2t}{40\sec^2\theta} \Rightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{t\cos^2\theta}{20};\ pero \quad tan\theta = \frac{s}{x} = \frac{t^2}{40} = \frac{10^2}{40} \Rightarrow \theta = 68.2^\circ$$

$$\Rightarrow\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=10\,seg.} = \frac{10}{20}\cos^2 68.2^\circ \approx 0{,}069 rad/seg$$

<u>Ejemplo 9.</u> Una escalera de 25 pies de longitud está apoyada en una casa, como indica la figura. Si la base de la escalera se separa de la pared a razón de 2 pies/seg., ¿a qué velocidad está bajando su extremo superior cuando la base está a 7 pies de la pared?



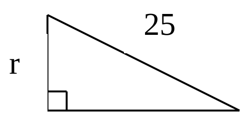
Solución:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{x=7} = ? \quad 25^2 = r^2 + x^2 \Rightarrow 0 = 2r.\frac{dr}{dt} + 2x.\frac{dx}{dt}$$

$$\downarrow \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{-2xdx/dt}{2r}$$

$$\text{si } x = 7 \Rightarrow 25^2 = r^2 + 7^2 \Rightarrow r = 24$$

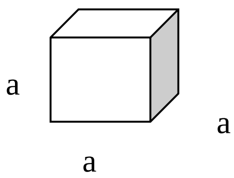
$$\Rightarrow\left(\frac{dr}{dt}\right)_{x=7} = \frac{-7.2}{24} = \frac{-7\text{pies}}{12\text{seg}}$$



x→
dx/dt=2 pies/seg.

<u>Ejemplo 10.</u> Todas las aristas de un cubo están creciendo 3 cm/seg. ¿con què rapidez cambia el volumen cuando cada arista tiene 10 cm?.

Solución:



$$\frac{da}{dt} = 3\text{cm}/seg \Rightarrow V = a^3 \quad \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 3a^2\frac{da}{dt} = 3_{\times}10^2.3$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{x=10cm} = ? \qquad \frac{dv}{dt} = 900\text{cm}^3/seg.$$

Ejemplo 11. Un globo esférico está siendo inflado de tal forma que su volumen aumenta a razón de $5m^3/min$. ¿A qué rapidez aumenta el diámetro cuando éste tiene 12m.?

Solución: $\frac{dv}{dt} = 5\text{cm}^3/min.$ $\qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi.\frac{D^2}{8}$

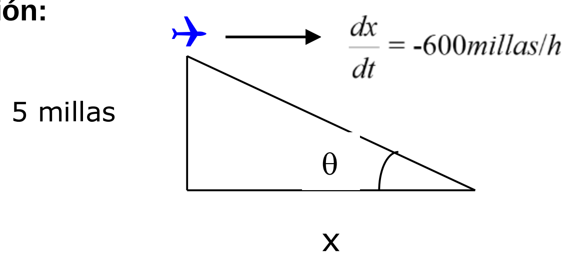
$$\left(\frac{dD}{dt}\right)_{D=12m.} = ? \qquad \Rightarrow V = \frac{\pi}{6}D^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{3\pi}{6}.D^2\frac{dD}{dt}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2\frac{dv}{dt}}{\pi D^2} = \frac{2.5}{\pi 12^2} = \frac{5}{72\pi}m/min.$$

$$\left(\frac{dD}{dt}\right)_{D=12m} = \frac{5}{72\pi}m/min = 0{,}022m/min$$

Ejemplo 12. Un avión vuela a 5 millas de altitud horizontalmente hacia el punto donde se encuentre un observador. La velocidad horizontal del avión es de 600 millas / hora. Hallar el ritmo de cambio del ángulo de elevación con respecto al observador, que se encuentra en tierra, cuando θ=30º.

Solución:



$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\theta=30º} = ?$$

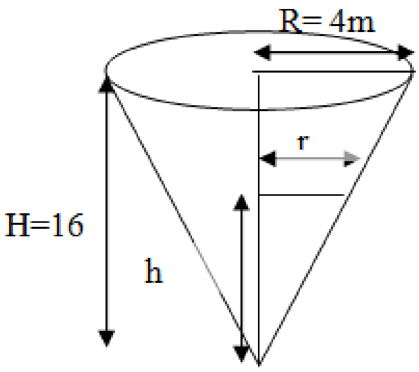
$$tan\theta = \frac{5}{x} = 5x^{-1} \Rightarrow \sec^2\theta.\frac{d\theta}{dt} = -5x^{-2}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{-5dx/dt}{x^2\sec^2\theta} = \frac{-5\cos^2\theta.dx/dt}{x^2}$$

$$\tan 30^{\circ} = \frac{5}{x} \qquad \Downarrow \quad \Downarrow \qquad x = \frac{5}{\tan 30^{\circ}} = \frac{5}{1/\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\theta=30^{\circ}} = \frac{-5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2(-600)}{(5\sqrt{3})^2} = \frac{5_{\times}\frac{3}{4}600}{25_{\times}3} = 30\text{rad.}$$

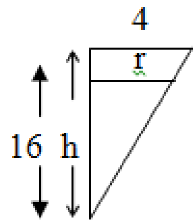
Ejemplo 13. Un tanque en forma de cono invertido tiene una altura de 16m. y un radio de 4m en la base. El agua fluye al tanque a razón de $2m^3/min$. ¿Qué tan rápido sube el nivel cuando el agua tiene 5m. de profundidad?.

Solución:



$$\frac{dV}{dt} = 2\text{m}^3/min. \qquad \left(\frac{dh}{dt}\right)_{h=5m} = ?$$

$$\frac{16}{4} = \frac{h}{r} \qquad \Downarrow \qquad r = \frac{h}{4}$$



$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi\left(\frac{h}{4}\right)^2 h}{3} = \frac{\frac{\pi . h^3}{16}}{\frac{3}{1}} = \frac{\pi}{48}h^3$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{3\pi}{48}h^2 . \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{dV/dt.16}{\pi h^2} = \frac{2_{\times}16}{\pi 5^2} = \frac{32}{25\pi} m/min = 0{,}41\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

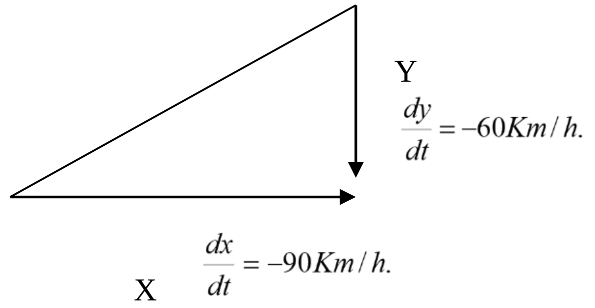
<u>Ejemplo 14.</u> Dos automóviles, uno de los cuales se dirige hacia el este ($\longrightarrow$) a razón de 90 km/h y el otro, hacia el sur ($\downarrow$) a razón de 60 km/h, viajan hacia una intersección de dos carreteras. ¿ A qué rapidez se acercan en el instante en que el primer automóvil se encuentra a 200 m y el segundo a 150 m, de la intersección?

Solución:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = ?$$

$$x = 0.2Km = 200m.$$

$$y = 0.15Km = 150m.$$



$$\boxed{z^2 = x^2 + y^2}$$

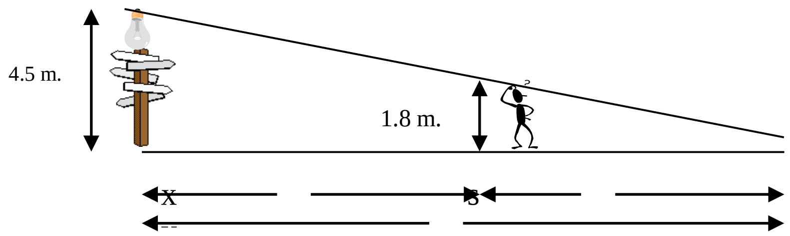
$$\Rightarrow 2Z.\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y.\frac{dy}{dt}$$

$$z = \sqrt{0.2^2 + 0.15^2} = 0.25 \qquad \div 2 \rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y.\frac{dy}{dt}}{z} = \frac{0.2_{\times}90 + 0.15_{\times}60}{0.25}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = 108Km/h$$

<u>Ejemplo 15.</u> Una lámpara está colgada a 4.5 m. por encima de un sendero horizontal y recto. Si un hombre de 1.8 m de estatura se aleja de la lámpara a razón de 1.5 m/seg. ¿A qué rapidez se desplaza la punta de su sombra? Y ¿ con qué rapidez se alarga su sombra?

Solución:



a) Por semejanza de triángulos $\frac{4.5}{1.8} = \frac{x+s}{s} \Rightarrow 2.5s = x + s \Rightarrow 1.5s = x \Rightarrow 1.5\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = 1.5m/seg$$

$$\frac{ds}{dt} = ? \qquad \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{dx/dt}{1.5} = \frac{1.5}{1.5} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = 1m/seg.$$

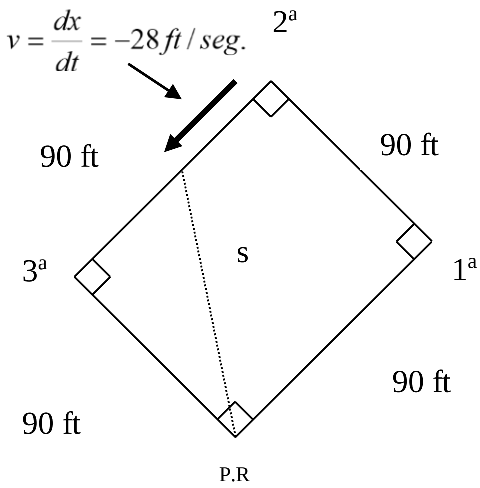
$$\frac{dy}{dt} = ?$$

b) $$\frac{4.5}{1.8} = \frac{y}{y-x} \Rightarrow 2.5y - 2.5x = y \Rightarrow 1.5y = 2.5x \Rightarrow 1.5\frac{dy}{dt} = 2.5\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{2.5dx/dt}{1.5} = \frac{2.5 \times 1.5}{1.5} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2.5m/seg.$$

Ejemplo 16. Un campo de béisbol tiene una forma cuadrada con 90 ft de lado. Un jugador está corriendo desde la 2ª hasta la tercera base a 28 ft/seg. ¿A qué ritmo está cambiando su distancia al punto de recepción cuando se encuentra a 30 pies de la 3ª base?

Solución:



$$v = \frac{dx}{dt} = -28\, ft/seg.$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = ?$$

$$x = 30\, ft$$

$$\boxed{s^2 = x^2 + 90^2} \quad \Rightarrow 2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$Si \quad x = 30$$

$$\Downarrow$$

$$S^2 = 30^2 + 90^2$$

$$S = 94.87\, ft$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{x\, dx/dt}{s}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{x=30} = \frac{30.(-28)}{94.98}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{x=30} = -8.85\, ft/seg.$$

Ejemplo 17. Una bola de nieve esférica se forma de tal manera que su volumen aumenta a razón de 8 pies^3/min. ¿Encontrar la razón a la cual aumenta el radio cuando la bola tiene 4 pies de diámetro?

Solución:

$$\frac{dV}{dt} = 8 pies^3 / min. \qquad \boxed{V = \frac{4}{3}\pi.R^3}$$

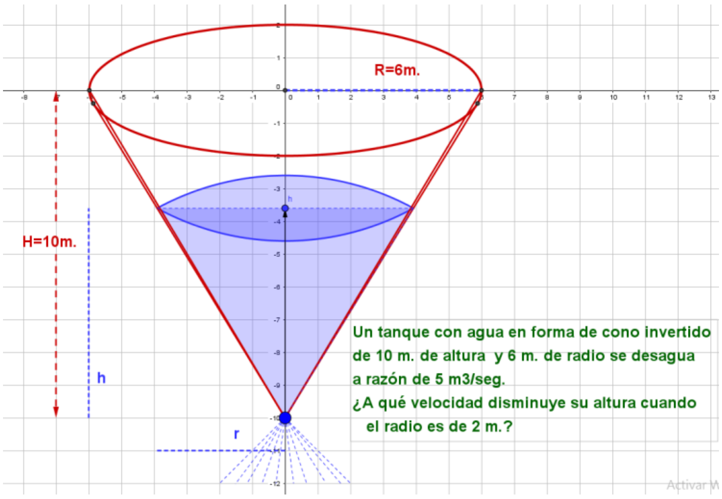
$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{R=2\,ft} = ? \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi.R^2.\frac{dR}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{dV/dt}{4\pi R^2} \Rightarrow \left(\frac{dR}{dt}\right)_{R=2} = \frac{8}{4\pi 2^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{pies}{min.} = 0.16\,ft/min.$$

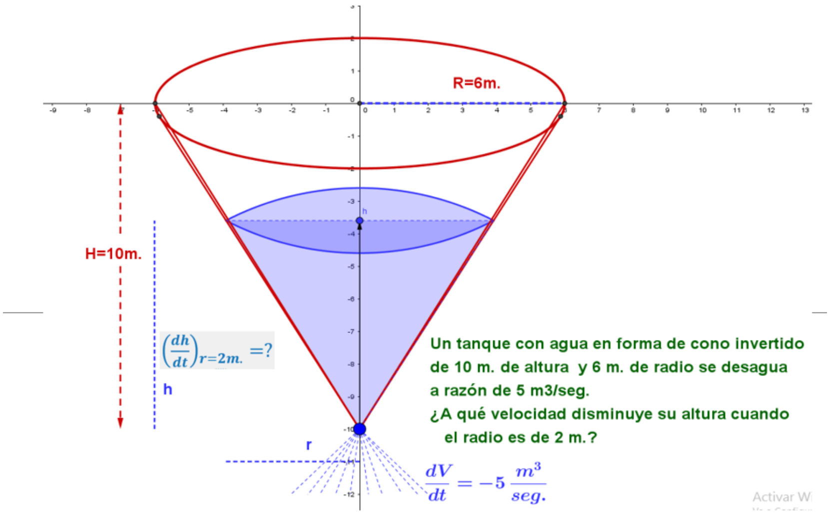
<u>Ejemplo 18.</u> Un tanque con agua en forma de cono invertido de 10 m. de altura y 6 m. de radio se desagua a razón de 5 m^3/seg. ¿A qué velocidad disminuye su altura cuando el radio es de 2 m.?

Solución:

1. ***Hacer una gráfica acorde con el enunciado del problema (siempre que sea posible)***

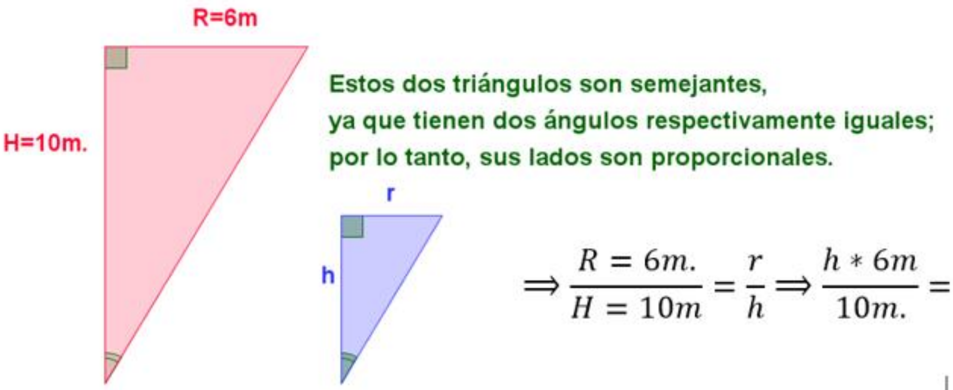


2. ***Colocar lo que me dicen, ¡que cambia con respecto al tiempo!, y lo que me piden que halle, ¿cómo cambia con respecto al tiempo?***



3. *Hallar una ecuaciòn matriz donde las ùnicas variables son lo que me dicen, ¡què cambia con respecto al tiempo! y lo que me piden que halle ¿Còmo cambia con respecto al tiempo?*

El volumen del cono de agua es: $V=\frac{\pi.r^2.h}{3}$ (1) pero en ésta ecuación "r" nos estorba, ya que no me dicen cómo cambia con respecto al tiempo, ni me preguntan cómo cambia con respecto al tiempo.



$$\Longrightarrow \frac{R=6m.}{H=10m}=\frac{r}{h}\Longrightarrow \frac{h*6m}{10m.}=r\Longrightarrow r=\frac{3h}{5} \quad (2)$$

$$\Longrightarrow \frac{R=6m.}{H=10m}=\frac{r}{h}\Longrightarrow \frac{h*6m}{10m.}=r\Longrightarrow r=\frac{3h}{5} \quad (2)$$

(2) en(1): $V=\dfrac{\pi.\left(\frac{3h}{5}\right)^2.h}{3}=\dfrac{\pi.\frac{\cancel{9}h^2}{25}.h}{\frac{\cancel{3}}{1}}=\dfrac{3\pi}{25}.h^3\Longrightarrow \boxed{V=\dfrac{3\pi}{25}.h^3}\ (ec.matriz)$

4. Derivo la ecuación matriz con respecto al tiempo y despejo lo que me están pidiendo

$$\frac{dV}{dt}=3.\frac{3\pi}{25}.h^2\frac{dh}{dt}=\frac{9\pi h^2}{25}.\frac{dh}{dt}\Longrightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{25.\frac{dV}{dt}}{9\pi.h^2}\Longrightarrow$$

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)_{\substack{r=2m.\\ Si\ r=\frac{3h}{5}\Rightarrow h=\frac{5r}{3}=\frac{10}{3}}}=\frac{25*(-5)}{9\pi.\left(\frac{10}{3}\right)^2}=\boxed{-0.4\ \text{m./seg}=\left(\frac{dh}{dt}\right)_{r=2m.}}$$

https://www.youtube.com/watch?v=6GaDCFF300I

5.12. PROBLEMAS PROPUESTOS SOBRE RAZON DE CAMBIO

1. Si V es el volumen de un cubo con longitud de lado x, encuentre dV/dt en términos de dx/dt R/ $\frac{dV}{dt}=3x^2.\frac{dx}{dt}$

2. Si xy=1 y dx/dt = 4, encuentre dy/dt cuando x=2. **R/** -1

3. Un farol se encuentra en la parte superior de un poste de 5 pies de altura. Un hombre cuya estatura de 6 pies camina alejándose del poste con una velocidad de 5 pies/seg. siguiendo una trayectoria rectilínea.. (a) ¿Con qué rapidez se mueve la punta de la sombra del hombre cuando éste se encuentra a 40 pies del poste?. (b) ¿Con qué rapidez se alarga la sombra del hombre en ese punto? R/ $(a)\frac{25}{3}\,pies/seg.$ $(b)\frac{10}{3}\,pies/seg.$

4. Un avión que vuela horizontalmente a una altura de 1 milla y a una velocidad de 500 millas/h pasa directamente sobre una estación de radar. Encuentre la velocidad a la que la distancia del avión a la estación aumenta cuando el avión se encuentra a 2 millas de la estación. R/ $250\sqrt{3}\,mi/h$

https://www.youtube.com/watch?v=kz4u81SwoeA

5. Dos automóviles parten de un mismo punto. Uno viaja hacia el sur a 60 mi./h y el otro viaja hacia el oeste a 25 mi./h. ¿A qué velocidad aumenta la distancia entre ellos dos horas después? R/ $65\,mi/h$

https://www.youtube.com/watch?v=_itAb8klDGI

6. Al mediodía, un barco A se encuentra 100 km al oeste de un barco B. El barco navega hacia el sur a 35 km/h y el B hacia el norte a 25 km/h. ¿Con qué velocidad cambia la distancia entre ellos a las 4:00 PM. R/ $55.4\,km/h$

7. La altura de un triángulo aumenta a razón de 1 cm/min. , mientras que el área del mismo aumenta a razón de 2 cm²/min. ¿A qué velocidad cambia la base del triángulo cuando la altura es igual a 10 cm y el área es de 100 cm²?

R/ $-1.6\ cm/min$

5.13. TRAZADO DE CURVAS

✓ **Extremos:**

Sea f definida en un intervalo I conteniendo C.

1. f(C) es el mínimo de f en I si f(C) $\leq f$(x) para todo x en I.

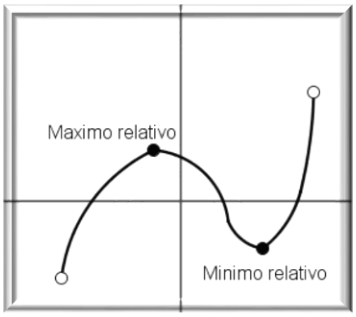
2. f(C) es el máximo de f en I. si f(C) $\geq f$(x) para todo x en I.

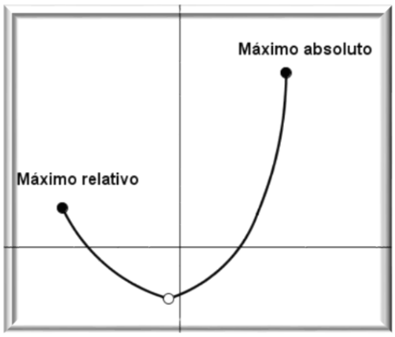
El mínimo y el máximo de una función en el intervalo se llama valores extremos ò extremos de la función en ese intervalo. A veces se les llama mínimo y máximo absolutos.

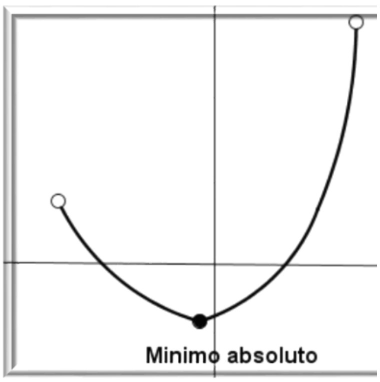
✓ **Extremos relativos:**

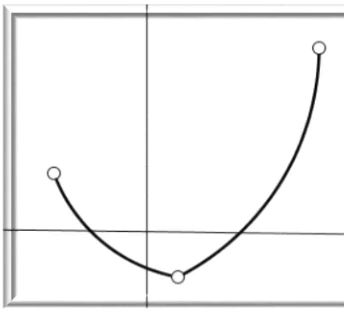
1. Si existe un intervalo abierto en el que f(C) tiene un máximo, entonces f(C) se llama un máximo relativo de f.

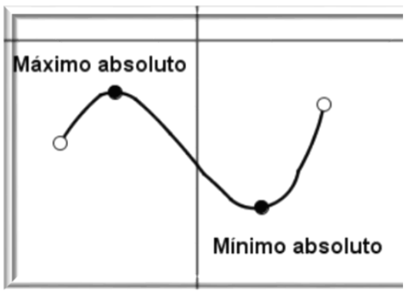
2. Si existe un intervalo abierto en el que f(C) tiene un mínimo, entonces f(C) se llama un mínimo relativo de f.

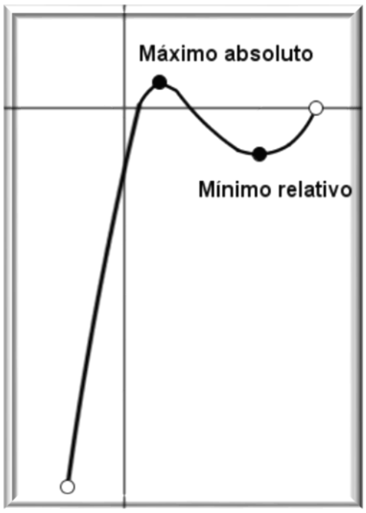




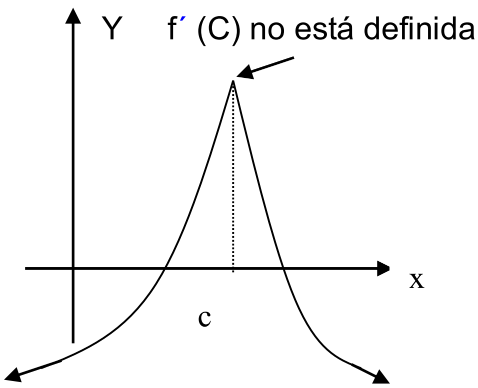


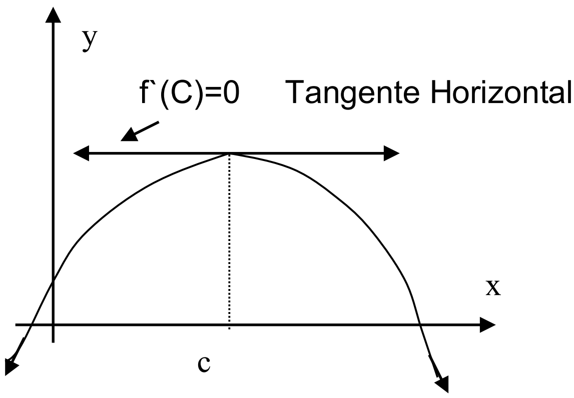






✓ **Número crítico:** Si f está definida en C, se dirá que C es un <u>número crítico</u> de f si f'(C)=0; ò si f'(C) no está definida. Los números críticos son posibles números de máximo, mínima, ò de pico.





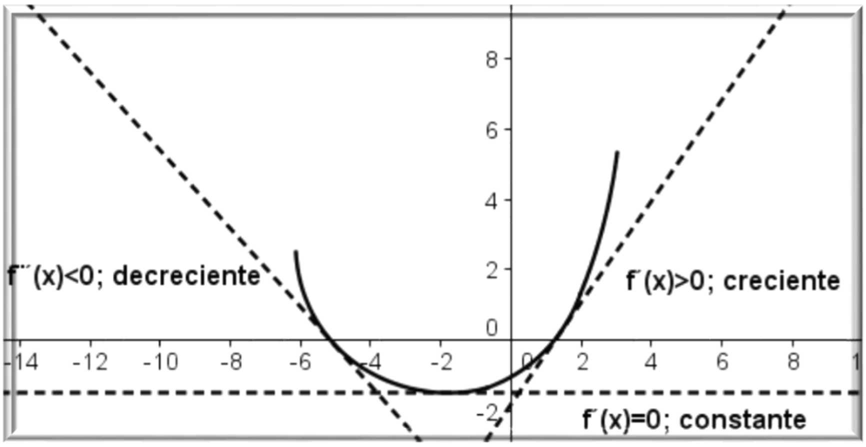
✓ **Definición de funciones crecientes y decrecientes:** Una función f se dice **creciente** en un intervalo si para todo par de número $x_1 \wedge x_2$ en el intervalo,

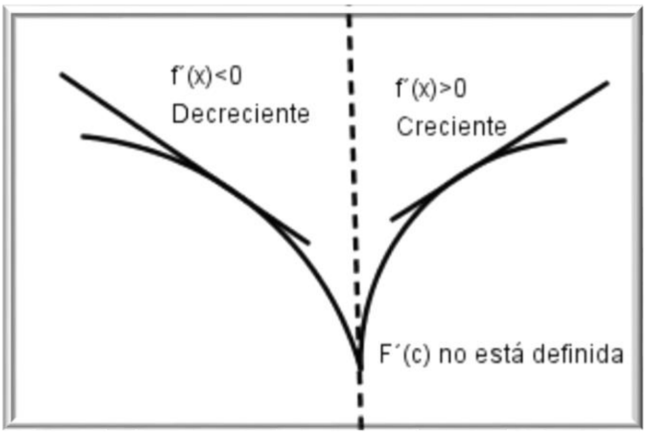
$x_1 < x_2 \text{ implica } f(x_1) < f(x_2)$

Una función f se dice **decreciente** en un intervalo si para todo par de números $x_1 \wedge x_2$ en el intervalo, $x_1 < x_2 \text{ implica } f(x_1) > f(x_2)$

✓**Criterio para funciones crecientes ò decrecientes:** Sea f una función derivable en el intervalo (a,b).

1. Si f'(x)>0 $\forall x \in$(a,b), $\Rightarrow$ f es creciente en (a,b)
2. Si f'(x)< 0 $\forall x \in$(a,b), $\Rightarrow$ f es decreciente en (a,b)
3. Si f'(x)= 0 $\forall x \in$(a,b), $\Rightarrow$ f es constante en (a,b)



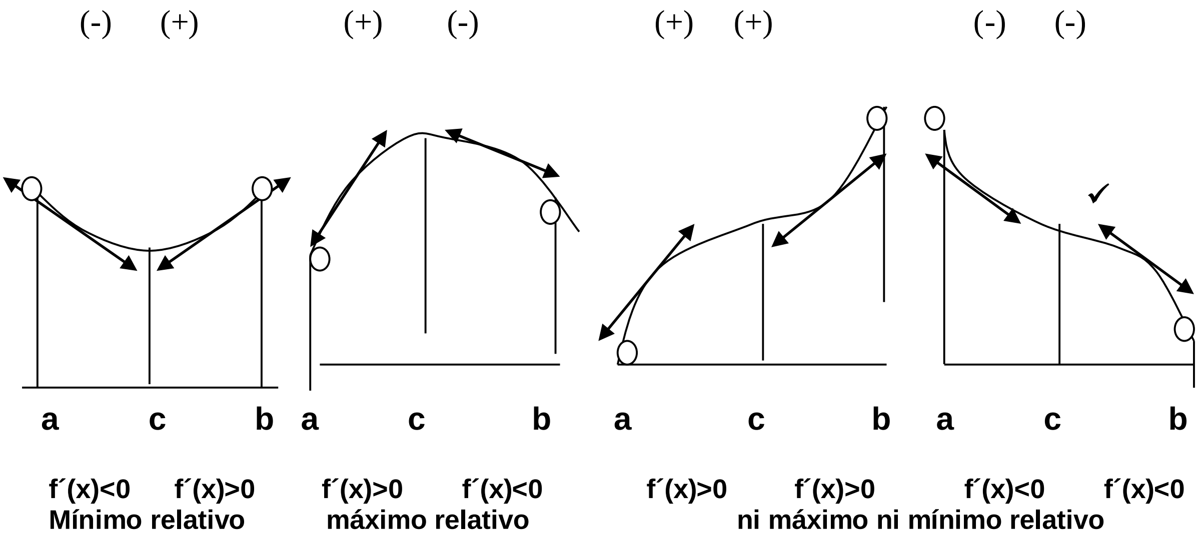


✓ **Criterio de la primera derivada:** Sea **c** un número crítico de una función f continua en un intervalo abierto I que contiene a **c**. Si f es derivable en el intervalo, excepto a lo sumo en **c**, f(c) puede clasificarse como sigue:

1. Si f'cambia de negativa a positiva en **c**, f(c) es un **mínimo relativo** de f.

2. Si f' cambia de positivo a negativo en **c**, f(c) es un **máximo relativo** de f.

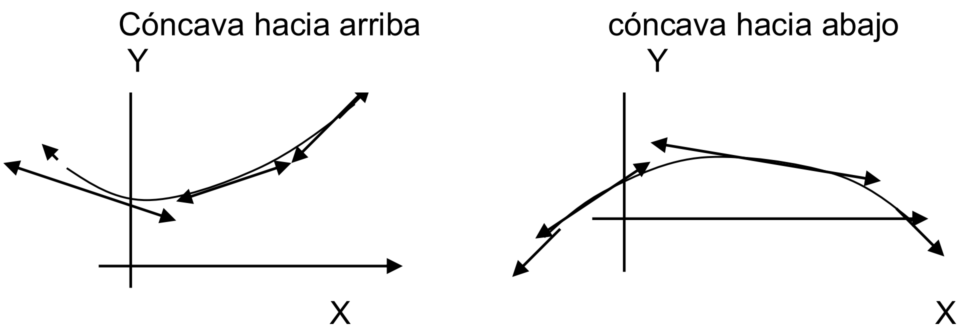
3. Si f' no cambia su signo en **c**, f(c) no es un **mínimo ni máximo relativo.**



✓**Concavidad:**

1. Si una curva está por encima de sus rectas tangentes, es cóncava hacia arriba.

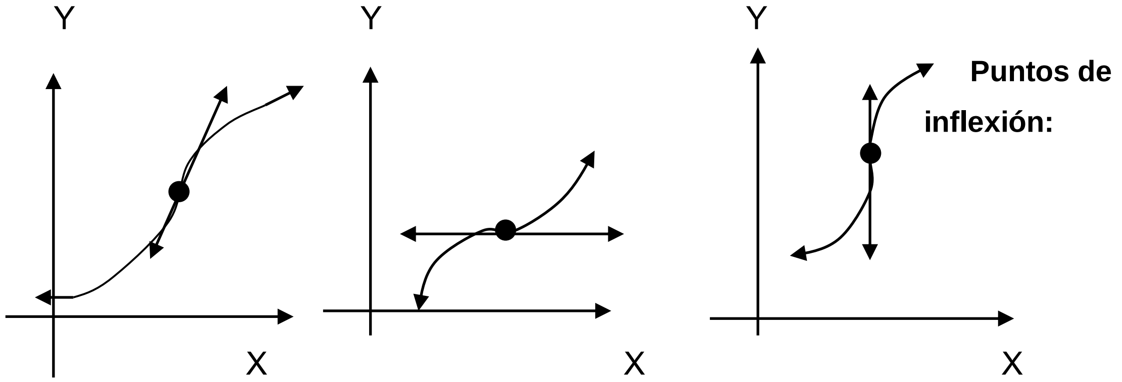
2. Si una curva está por debajo de sus rectas tangentes, es cóncava hacia abajo.



Criterio de concavidad: Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I.

1. Si $f''(x) > 0$ $\forall x$ en I, la gráfica de f es cóncava hacia arriba.

2. Si $f''(x) < 0$ $\forall x$ en I, la gráfica de f es cóncava hacia abajo.



Puntos de inflexión son los puntos donde la curva cambia de concavidad. Hay tres tipos de puntos de inflexión:

✓ **Criterio de la segunda derivada:** Sea f una función tal que $f'(c)=0$ y tal que la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a c.

1. Si $f''(c)>0$, $\Rightarrow f(c)$ es un mínimo relativo.
2. Si $f''(c)<0$, $\Rightarrow f(c)$ es un máximo relativo.
3. Si $f''(c)=0$ $\Rightarrow f(c)$ es un punto de inflexión.

✓**Asíntota oblicua:** Una función racional se llama impropia si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador. Si el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador entonces la función tiene una **asíntota oblicua.** Para hallarla, reescríbase por cociente tal función racional (Impropia) como suma de un polinomio de primer grado y una expresión racional (propia).

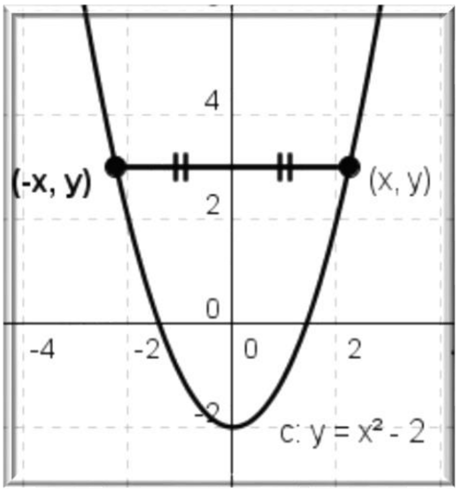
✓ **Simetría:** La grafica de una ecuación es simétrica con respecto al:

1. Eje “y” si al sustituir “x” por “-x” no cambia la ecuación original.
2. Eje “x” si al sustituir “y” por “-y” no cambia la ecuación original.
3. Origen si al sustituir “x” por “-x” y “y” por “-y” no cambia la ecuación original.

Ejemplo 4:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2 \\ y = (-x)^2 - 2 \\ y = x^2 - 2 \end{array}\right]$$

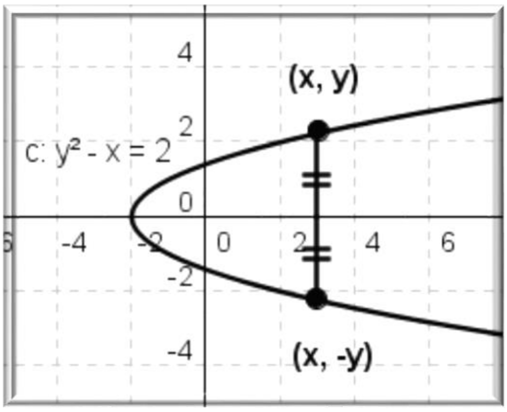
Simetrica con respecto al eje "y"



Ejemplo 5:

$$\left.\begin{array}{l} x = y^2 - 2 \\ x = (-y)^2 - 2 \\ x = y^2 - 2 \end{array}\right]$$

Simetrica con respecto al eje "x"

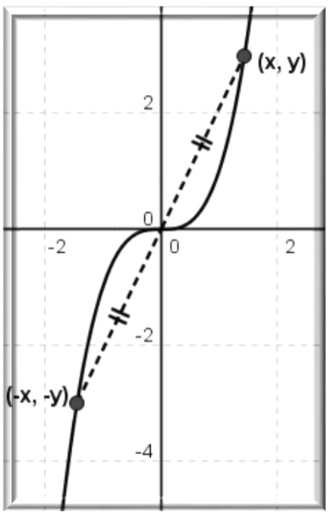


Obsérvese que cuando hay simetría con respecto al eje "x" no es función, por el criterio de la recta vertical

Ejemplo 6:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{y = x^3} \\ \boldsymbol{-y = (-x)^3} \\ \boldsymbol{-y = -x^3} \\ \boldsymbol{multiplico\ por\ (-1): y = x^3} \end{array}\right]$$

Simetría con respecto al origen

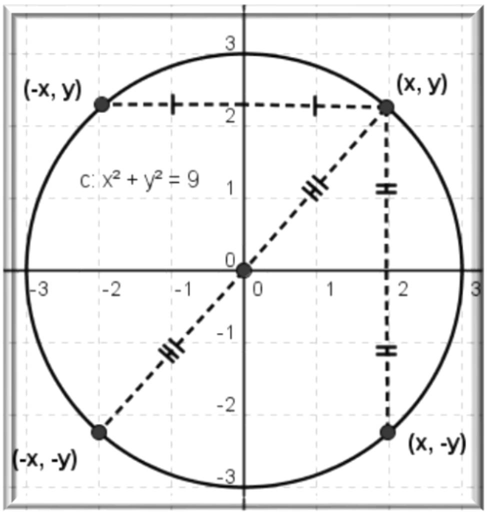


Ejemplo 7:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (-x)^2+(-y)^2=9 \\ x^2+y^2=9 \end{array}\right] \text{Simetrica con respecto al origen.}$$

$$\left.\begin{array}{l} (-x)^2+y^2=9 \\ x^2+y^2=9 \end{array}\right] \text{Simetrica con respecto al eje "y".}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+(-y)^2 \pm 9 \\ x^2+y^2=9 \end{array}\right] \text{Simetrica con respecto al eje "x".}$$

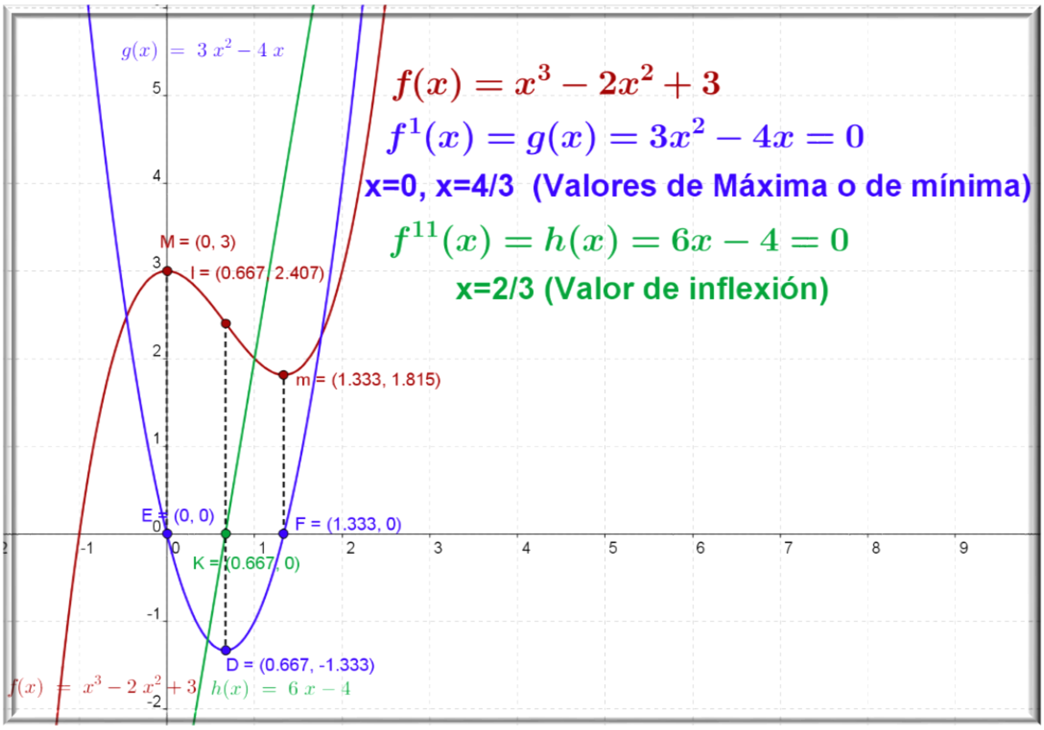


De las diapositivas anteriores podemos concluir:

1. *Cuando estamos hablando de funciones, nunca habrá simetría con respecto al eje "x".*
2. *Para que haya simetría con respecto al eje "y", todas las "x" deben tener exponente par.*
3. *Cuando tenemos una función, no puede haber simetría con respecto al eje "y" y con respecto al "origen" al mismo tiempo.*

https://www.youtube.com/watch?v=nsZDN3X8zWU

Significado geométrico de la primera y la segunda derivada

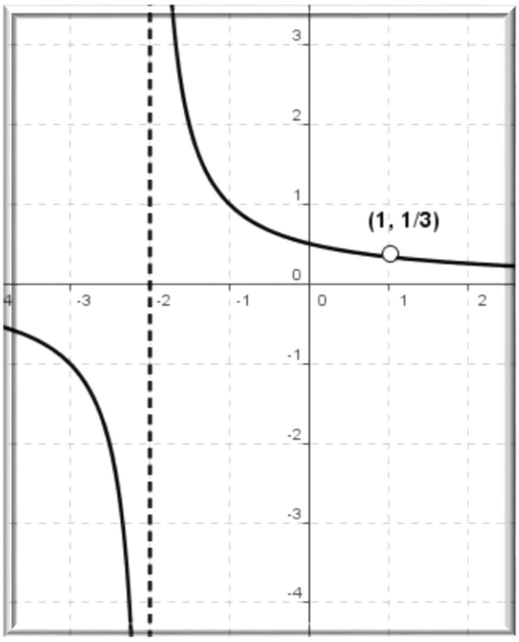


5.14. PASOS PARA GRAFICAR UNA FUNCIÓN

1. Dominio. Puntos de discontinuidad, asíntotas verticales.

Ejemplo 8: $f(x)=\frac{\cancel{(x-1)}}{(x+2)\cancel{(x-1)}}=\frac{1}{x+2}\Big\}$ $\boldsymbol{En\ x=1\ hay\ punto\ de\ discontinuidad.\ P_d(1,\frac{1}{3})}$

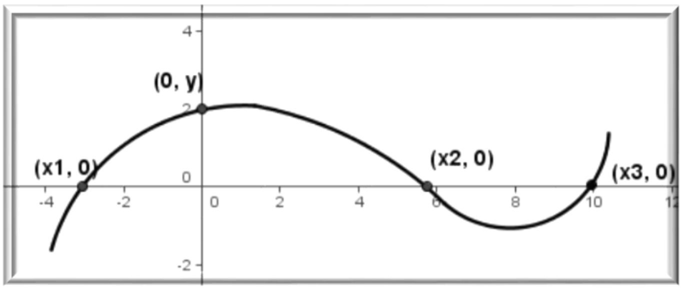
$\boldsymbol{x=-2\ es\ asíntota\ vertical}$



2. Intercepto con los ejes.

a) con el eje "x" ⇒ y = 0

b) con el eje "y" ⇒ x = 0



3. Simetrías

4. Asíntotas horizontales y oblicuas

a. Asíntotas horizontales $\left\{\begin{matrix}\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow y=a\ \ y\ \ y=b\ son\ asíntotas\ horizontales$

$$Si\ f(x)=\frac{ax^n\pm\cdots}{bx^m\pm\cdots}\Bigg\}\left\{\begin{matrix}1. \quad Si\ n=m\ \Rightarrow y=\dfrac{a}{b}\ es\ asíntota\ horizontal\\ 2.\ Si\ n>m\ \Rightarrow y=\pm\infty\ \Rightarrow no\ hay\ asíntotas\ horizontales\\ 3. \quad Si\ n<m\ \Rightarrow y=0\ es\ asíntota\ horizontal\end{matrix}\right.$$

b. Asíntota oblicua $\rightarrow Si\ \ f(x) = \dfrac{ax^n \pm .....}{bx^{n-1} \pm ...} \ \Rightarrow\ ax^n \pm .... \left| \dfrac{bx^{n-1} \pm ....}{mx + c} \right.$

$\Rightarrow$ y = mx + c es asíntota oblicua.

5. **Puntos de máxima, mínima, inflexión, pico.** Dado y = f(x) se procede:

a) Se deriva y se iguala a cero; $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} = 0 = m_t(x)$ $(pendiente\ de\ la\ recta\ tangente$

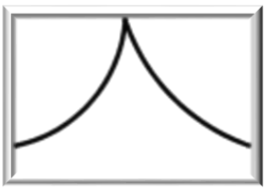
$a\ la\ curva\ en\ cualquier\ valor\ "x"$

$\Rightarrow$ **g(x) = 0**; Se resuelve la ecuación y resultan x = a, x = b, x = c

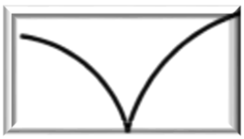
valores críticos $\rightarrow$ posibles valores máxima o de mínima.

h(x) = 0 ; (donde el denominador se hace 0, la función no es derivable; no existe la derivada). Al resolver h(x) = 0 resultan: x = d, x = e; Valores de pico posible: deben $\in$ al dominio; además si hay tangente vertical no es de pico, sino de inflexión . Se puede hacer tabla de valores con valor posterior y anterior al valor de posible de pico.

Pico



Pico



b) Se halla f''(x) y se reemplazan los valores críticos.

$f''(a)>0 \quad \Rightarrow \quad x = a$ es de mínima

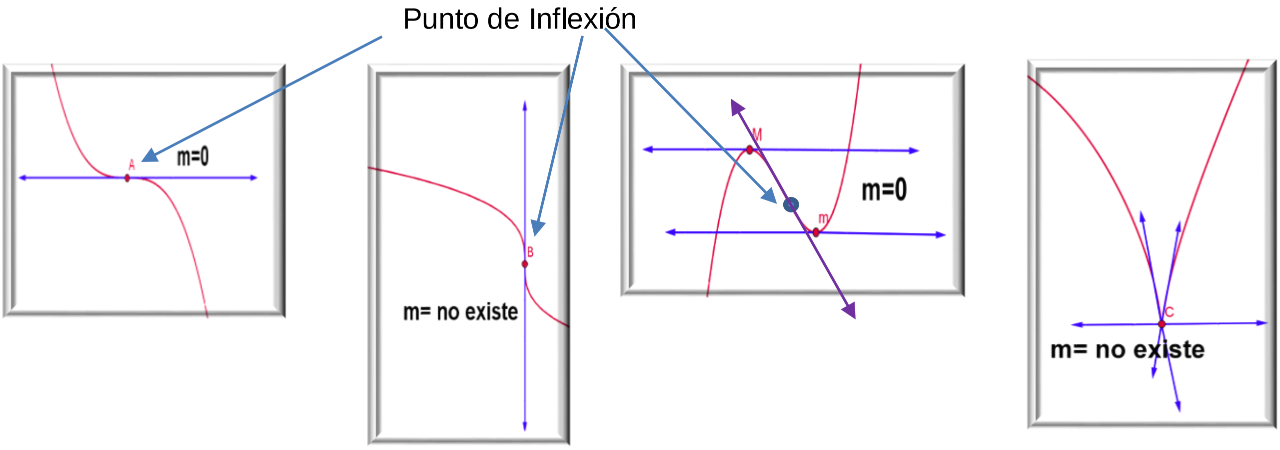
$f''(b)=0 \quad \Rightarrow \quad x = b$ es de inflexión.

$f''(c)<0 \quad \Rightarrow \quad x = c$ es de máxima.

c) Se hace $f''(x)=0$;$\Rightarrow$ al resolver la ecuación resulta x=f, g, b (valores de inflexión)

d) Se hallan los compañeros en "y" de todos los anteriores valores de "x" : f(a),f(b),f(c), f(d),f(e),f(f),f(g).

6. Se gráfica:



7. Se hallan los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidades; y rango.

crece $\rightarrow x \in (a,c) \cup (d,\infty)$

decrece $\rightarrow x \in (-\infty,a) \cup (c,d)$

cóncava hacia arriba $\rightarrow x \in (e,b) \cup (f,d)$

cóncava hacia abajo $\rightarrow x \in (-\infty,e) \cup (b,f) \cup (d,\infty)$

Rango $\rightarrow y \in [f(d),\infty)$

https://www.youtube.com/watch?v=tlQle6Op1wg

https://www.youtube.com/watch?time_continue=2&v=QGiiy6PMhtE

Ejemplo 9. Graficar $f(x) = (x^2-4)^{2/3} = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}$

Solución:

1. D = {x∈R} → no hay puntos de discontinuidad ni asìntotas verticales.

2. Interceptos: **a.** Con "x" ⇒ y =0⇒ 0 = $(x^2-4)^{2/3}$

0 = x^2-4 ⇒ 0 = (x-2) (x+2)

x=2 x=-2 $\Rightarrow P_1(2,0) \wedge P_2(-2,0)$

b. Con "y" ⇒ x = 0 ⇒ $y = (0^2-4)^{2/3} = 2.5 \quad P_3 = (0,2.5)$

3. Simetrías $y = ((-x)^2-4)^{2/3}$

$y = (x^2-4)^{2/3}$ Simetría con el eje "y"

4. Asíntotas horizontales y oblicuas: no hay

5. Puntos de máximo, mínimo, inflexión, cresta:

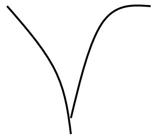
a. $f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-4)^{-1/3}(2x) = \frac{4x}{3.\sqrt[3]{x^2-4}} = 0$

$4x = 0 \Rightarrow x = 0$ (Valor crítico: posible máximo ò mínimo)

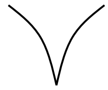
$3.\sqrt[3]{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ (Valores de cresta posible)

$x = \pm 2 \in D$

x	-1.9	-2	-2.1	1.9	2	2.1
y	0.53	0	0.55	0.53	0	0.55



c1(-2,0)



c2(2,0)

b. $$f'(x) = \frac{4x}{3(x^2-4)^{1/3}} \Rightarrow f''(x) = \frac{4.3(x^2-4)^{1/3} - \frac{3}{3}(x^2-4)^{-2/3}(2x).4x}{9(x^2-4)^{2/3}}$$

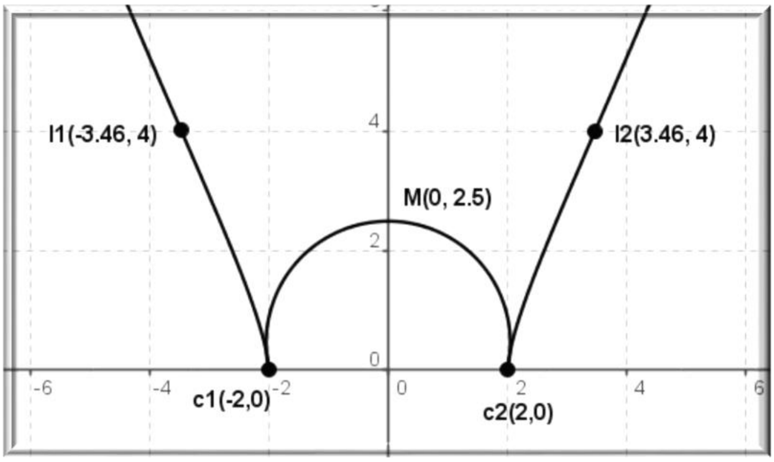
$$f''(x) = \frac{\frac{12\sqrt[3]{x^2-4}}{1} - \frac{8x^2}{\sqrt[3]{(x^2-4)^2}}}{9(x^2-4)^{2/3}} = \frac{\frac{12(x^2-4)-8x^2}{\sqrt[3]{(x^2-4)^2}}}{\frac{9(x^2-4)^{2/3}}{1}} = \frac{4x^2-48}{9(x^2-4)^{4/3}}$$

$$f''(x) = \frac{4(x^2-12)}{9(x^2-4)^{4/3}} \Rightarrow f''(0) = \frac{4(0-12)}{9(0-4)^{4/3}} < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ es de max.}$$

c. $$f''(x) = \frac{4(x^2-12)}{9(x^2-4)^{4/3}} = 0 \Rightarrow x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12}$$

$x = \pm$ 3.46 valores de inflexión

d.
$$f(0) = 2.5 \Rightarrow M(0{,}2.5)$$
$$f(3.46) = 4 \Rightarrow I_1(3.46{,}4)$$
$$f(-3.46) = 4 \Rightarrow I_2(-3.46{,}4)$$



7. Crece $\rightarrow$ x $\in$ (-2,0) U (2,∞)

Decrece $\rightarrow$ x $\in$ (-∞,-2) U (0,2)

Cóncava U $\rightarrow$ x $\in$ (-∞,-3.46) U (3.46,∞)

Cóncava $\cap$ $\rightarrow$ x $\in$ (-3.46,-2) U (-2,2) U (2,3.46)

Rango $\rightarrow$ y $\in$[0,∞)

https://www.youtube.com/watch?v=XFrpIRa08NM

Ejemplo 10. Graficar $f(x)=\dfrac{2(x^2-9)}{x^2-4}$

Solución:

1. $f(x)=\dfrac{2(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+2)}$ $\quad D=\left\{x/_{x}\neq \pm 2\right\}$

x = 2 x = -2

Asíntotas verticales

2. Interceptos : $x=0 \;\Rightarrow\; y=\dfrac{2(-9)}{-4}=4.5 \;\Rightarrow\; P_1(0{,}4.5)$

$$y=0 \Rightarrow 0=\frac{2(x^2-9)}{x^2-4} \Rightarrow 0=x^2-9=(x-3)(x+3)$$

x = 3 x = -3

$P_2(3{,}0)$ $P_3(-3{,}0)$

3. Simetrías: $y=\dfrac{2\{(-x)^2-9\}}{(-x)^2-4}=\dfrac{2(x^2-9)}{x^2-4}$ simetría con respecto a "y"

4. $y=\dfrac{2x^2-18}{x^2-4}\Rightarrow y=2$ Asíntota horizontal; Asíntota oblicua no hay

5. a. $f(x)=\dfrac{2x^2-18}{x^2-4} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{20x}{(x^2-4)^2}=0$

20x=0 $\Rightarrow$ x=0 (valor crítico $\rightarrow$ posible máx. ò mín.)

$\left(x^2-4\right)^2=0 \Rightarrow$ x = $\pm$ 2 $\notin$ Dominio $\Rightarrow$ x = $\pm$ 2 no son de cresta

a. $f''(x)=\dfrac{20(-4-3x^2)}{(x^2-4)^3}$;

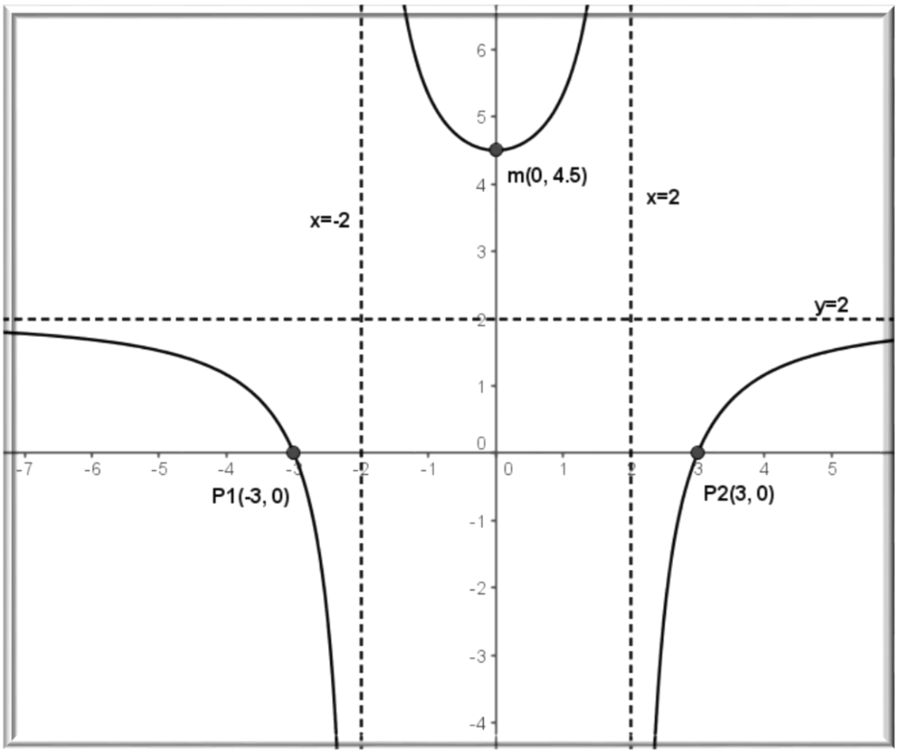
b. $f''(0)>0 \Rightarrow$x = 0 es de mínima

c. $f''(x)=\dfrac{20(-4-3x^2)}{(x^2-4)^3}=0 \;\Rightarrow\; -4-3x^2=0 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{\dfrac{-4}{3}}=\ldots i$

no hay puntos de inflexión.

d. $f(0)=4.5$ $\Rightarrow$ m(o,4.5)

Gráfica:



7. Crece $\rightarrow$ x $\in$ (0,2) U (2,∞)

Decrece $\rightarrow$ x $\in$ (-∞,-2) U (-2,0)

Cóncava hacia arriba $\rightarrow$ x $\in$ (-2,2)

Cóncava hacia abajo $\rightarrow$ x $\in$ (-∞,-2) U (2,∞)

Rango $\Rightarrow$ y $\in$ (-∞,2) U [4.5,∞)

https://www.youtube.com/watch?v=Il_kVgCPnKA

Ejemplo 11. Graficar $f(x)=\dfrac{(x^2-2x+4)}{x-2}$

Solución:

1. $f(x)=\dfrac{(x-?)(x-?)}{x-2}$ $\qquad D=\{x / x\neq 2\}$

x = 2 Asíntota vertical

2. Interceptos : $x=0 \Rightarrow y=\dfrac{4}{-2}=-2 \Rightarrow P_1(0,-2)$

$$y=0 \Rightarrow 0=\frac{x^2-2x+4}{x-2} \Rightarrow 0=x^2-2x+4$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1)(4)}}{2(1)}=.........i$$

No hay interceptos con “x”

3. Simetrías: no hay

4. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$ no hay Asíntotas horizontales

x	-1	2
y	-1	2

$$\begin{array}{r|l} x^2-2x+4 & x-2 \\ \hline -x^2+2x & x \\ \hline 4 & \end{array} \Rightarrow y=x \quad \text{Asintota oblicua}$$

5. a. $f'(x)=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}=0$

$$x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0$$

x =0 x =4 → Valores críticos → posible máx. o min.

$(x-2)^2=0 \Rightarrow$ x =2 $\notin$ dominio $\Rightarrow$ x =2 no es de cresta.

b. $f''(x)=\dfrac{8}{(x-2)^3}$. $\to f''(0)<0 \Rightarrow$ x =0 es de máxima

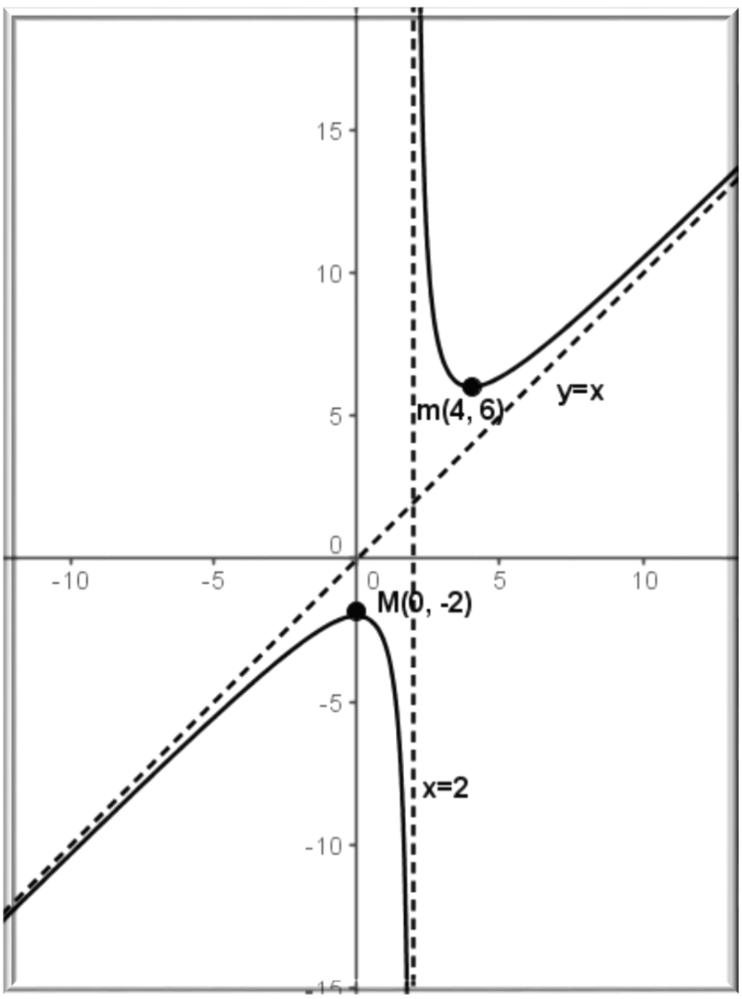
$f''(4) > 0 \Rightarrow$ x =4 es de mínima

c. $f''(x) = \dfrac{8}{(x-2)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 8 \overset{?}{=} 0$ no hay punto de inflexión

d. $f(0)= -2 \Rightarrow$ M(o,-2)

$f(4)=6 \Rightarrow$ m(4,6)

6. Gráfica.



7. Crece $\rightarrow$ x $\in$ $(-\infty,0)$ U $(4,\infty)$

Decrece $\rightarrow$ x $\in$ (0,2) U (2,4)

Cóncava U $\rightarrow$ x $\in$ $(2,\infty)$

Cóncava $\cap\rightarrow$ x $\in$ $(-\infty,2)$

Rango $\rightarrow$ y $\in$ $(-\infty,-2]$ U $[6,\infty)$

Ejemplo 12. Graficar $f(x) = \dfrac{-x^3 + x^2 + 4}{x^2}$

Solución:

1. D = {x /x≠0}   x =0 asíntota vertical

2. Interceptos : $x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{0} = ?$ no hay con el eje "y"

$$y = 0 \;\Rightarrow\; 0 = \frac{-x^3 + x^2 + 4}{x^2} \;\Rightarrow\; 0 = -x^3 + x^2 + 4$$

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 4$$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ & \downarrow & -2 & -2 & -4 \\ \hline & -1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$f(2)$=-8+4+4=0 $\Rightarrow$ x-2 es factor

$P_1(2,0)$ $-x^2 - x - 2 = 0$

$$\downarrow$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-1)(-2)}}{2(-1)} = \ldots\ldots. i$$

3. Simetrías : no hay

4. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$ no hay asíntotas horizontales

x	-2	2
y	3	-1

$$\begin{array}{r|l} -x^3 + x^2 + 4 & x^2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3} & -x+1 \\ \underline{x^2 + 4} & \\ \underline{-x^2} & \\ 4 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ $y = -x + 1$ Asintota oblicua

5. a. $f'(x) = \dfrac{-x^3 - 8}{x^3} = 0$

$$-x^3 - 8 = 0 \quad\Rightarrow\quad x^3 + 8 = 0 \;\Rightarrow\; (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

x =-2 →Valor critico → máx. ò min. posible

$x^3 = 0 \Rightarrow$ x =0 $\notin$ dominio $\Rightarrow$ x =0 no es de cresta

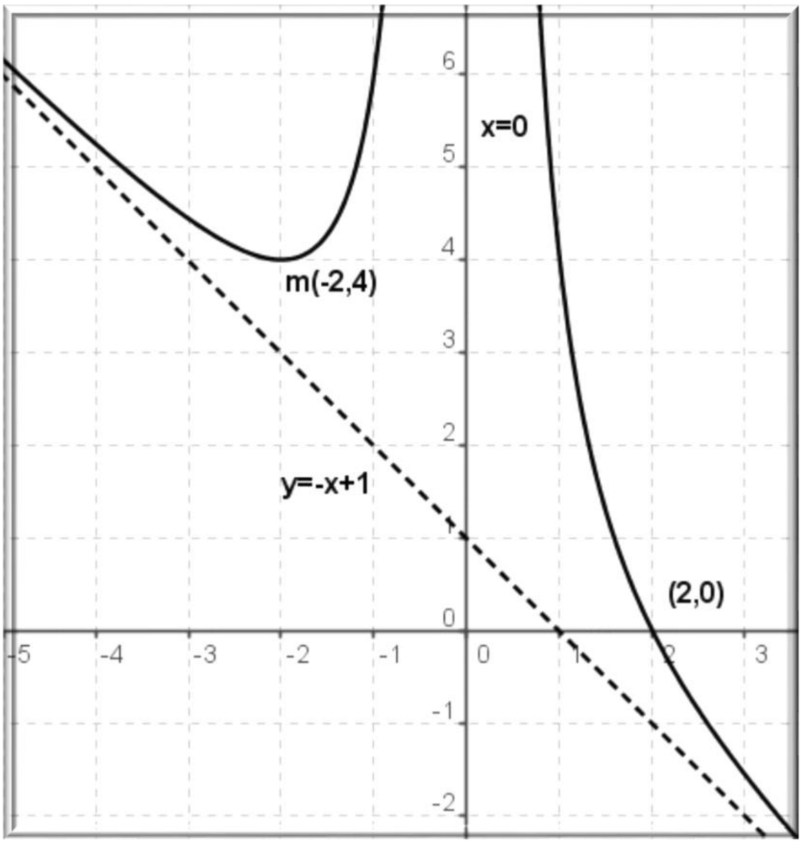
b. $f''(x) = \dfrac{24}{x^4}$

$f''(-2) > 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$ es de minima

c. $f''(x) = \dfrac{24}{x^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 24 \overset{?}{=} 0$ no hay puntos de inflexion

d. f(-2)=4 $\Rightarrow$ m(-2,4**)**

6. Gráfica



7. Crece $\rightarrow$ x $\in$ (-2,0)

Decrece $\rightarrow$ x $\in$ (-∞,-2) U (0,∞)

Cóncava U $\rightarrow$ x $\in$ (-∞,0) U (0,∞)

Cóncava $\cap \rightarrow$ x $\in \varnothing$

Rango $\rightarrow$ y $\in$ (-∞,∞)

Ejemplo 13. Graficar $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$

Solución:

1. D = {x /x $\in$R} no hay puntos de discontinuidad ni asíntotas verticales

2. Interceptos: $y = 0 \Rightarrow 0 = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$

$(x^4-16)-(4x^3-16x)=(x^2-4)(x^2+4)-4x(x^2-4)=(x^2-4)(x^2+4-4x)$

$0=(x-2)(x+2)(x-2)^2 = (x-2)^3(x+2)$

$\downarrow \quad \downarrow$

x=2 x= -2 $\Rightarrow$ P_1 (2,0), P_2(-2,0)

x=0 $\Rightarrow$ y = 0-0+0-16 $\Rightarrow$ P_3(0,-16)

3. Simetrías : no hay

4. Asíntotas horizontales y oblicuas : no hay

5.a. $f'(x) = 4x^3-12x^2+16 = 0$; supongamos que $g(x)= 4x^3-12x^2+16$

$\Rightarrow g(1) \neq 0$

$g(-1) = 0$ $\Rightarrow$ x+1 es factor g(x) $\Rightarrow$

$\Downarrow$

x =-1

	4	-12	0	16
-1	$\downarrow$	-4	16	-16
	4	-16	16	0

x=2 $\Leftarrow 4(x-2)^2=0 \Leftarrow 4(x^2-4x+4) = 0 \Leftarrow 4x^2- 16x +16$

x =-1 y x =2 (Valores críticos → posibles valores máx o min)

b. $f''(x) = 12x^2-24x$

$f''(-1) > 0 \Rightarrow$ x = -1 es de mínima

$f''(2) = 0 \Rightarrow$ x =2 es de inflexión

c. $f''(x) = 12x^2-24x=0 \Rightarrow 12x(x-2)=0$

x =0 x =2

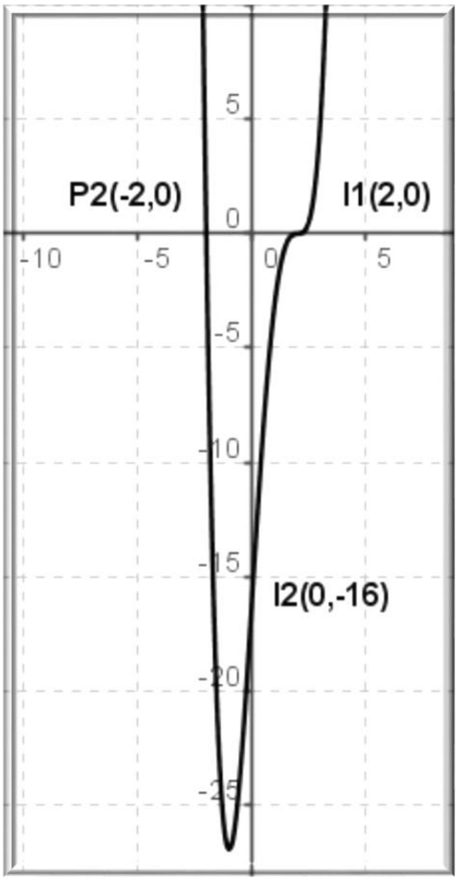
Valores de inflexión

d. $f(-1)= -27 \Rightarrow$ m (-1,-27)

$f(2)= 0 \Rightarrow$ I_1 (2,0)

$f(0)= -16 \Rightarrow$ I_2 (0,-16)

6. Gráfica



7.Crece → x $\in$(- 1, ∞)

Decrece → x $\in$ (- ∞,-1)

Cóncava U → x $\in$ (- ∞,0) U (2,∞)

Cóncava $\cap$→ x $\in$ (0,2)

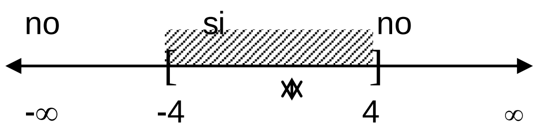
Rango → y $\in$ [-27,∞)

Ejemplo 14. Graficar $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$ = x $(16-x^2)^{1/2}$

Solución:

1. $16- x^2 \geq 0 \Rightarrow (4-x)(4+x) \geq 0$ (a)

x=4 x= - 4



Supongamos: x=0 en (a)→(+)(+)≥0si

D= {x/-4 ≤ x ≤ 4} No hay asíntotas verticales ni puntos de discontinuidad

2. Interceptos: x=0 $\Rightarrow$ y=0 $\sqrt{16 - 0}$ = 0 $\Rightarrow$ $P_1(0,0)$

y=0 $\Rightarrow$ 0=x $\sqrt{16-x^2}$ = x $\sqrt{(4-x)(4+x)}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

x=0 x=4 x=-4P$_2$(4,0) P$_3$(-4,0)

3. Simetrías: -y=-x $\sqrt{16-(-x)^2}$; -y=-x $\sqrt{16-x^2}$

x -1→ y=x $\sqrt{16-x^2}$ hay simetría con el origen

4. Asíntotas horizontales y oblicuas : no hay

5.a. f'(x) = $\dfrac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}} = 0$

16-2x^2 =0 $\Rightarrow$ x= $\pm$ 2.8 (Valores críticos → posibles valores máx o min)

$\sqrt{16-x^2}$ =0 $\Rightarrow$ 16-x^2 = 0 $\Rightarrow$ x=$\pm$4$\in$ dominio (posibles valores de cresta)

x	3.9	4	4.1	-3.9	-4	-4.1
y	3.5	0	.?	-3.5	0	.?

x=4 mínimo m (4,0)

porque D=x$\in$ [-4,4]

x= - 4 máximo M (-4,0)

b. f''(x) = $\dfrac{2x(x^2-24)}{(16-x^2)^{3/2}}$

f''(2.8) < 0 $\Rightarrow$ x =2.8 es de máxima

f''(-2.8) >0 $\Rightarrow$ x = -2.8 es de mínima

c. f''(x) = $\dfrac{2x(x^2-24)}{(16-x^2)^{3/2}}$ =0 $\Rightarrow$ 2x (x^2 - 24)=0

x =0 x =$\pm$4.9 $\notin$ dominio

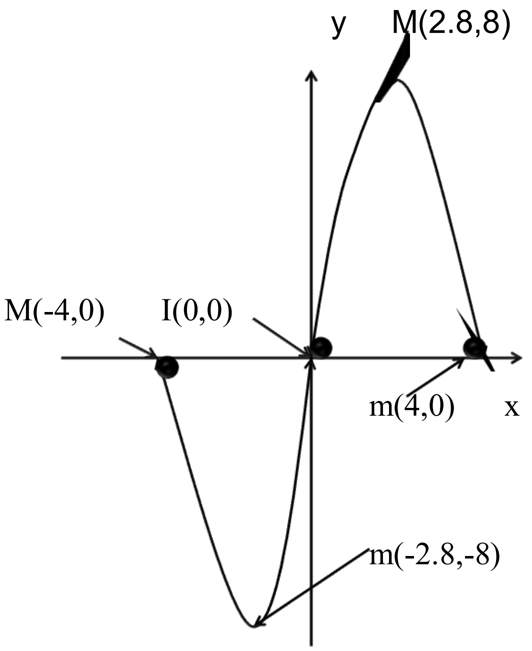
x =0 Valor de inflexión

d. f(2.8)= 8 $\Rightarrow$ M (2.8,8)

f(-2.8)= -8 $\Rightarrow$ m (-2.8,8)

f(0)= 0$\Rightarrow$ I (0,0)

6. Gráfica



7. Crece → X∈ (- 2.8,2.8)

Decrece → X ∈ (- 4,-2.8) U (2.8,4)

Cóncava U → X ∈ (- 4,0)

Cóncava ∩→ X ∈ (0,4)

Rango → Y ∈ [-8,8]

Ejemplo 15. Graficar $y = \dfrac{x^3}{2x^2 - 8}$

Solución:

1. $\dfrac{x^3}{2(x^2-4)} = \dfrac{x^3}{2(x-2)(x+2)}$ D={x/x ≠± 2}

x=2 x= -2 Asíntotas verticales

2. Interceptos: y=0 ⇒ $0=\dfrac{x^3}{2x^2-8}$ ⇒ $x^3=0$ ⇒ x = 0 ⇒ $P_1(0,0)$

x =0 ⇒ $y = \dfrac{0}{0-8} = 0$

3. Simetrías: $-y=\dfrac{(-x)^3}{2(-x)^2-8}$ ⇒ $-y=\dfrac{-x^3}{2x^2-8}$

x -1→ $y=\dfrac{x^3}{2x^2-8}$ hay simetría con el origen

4. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ no hay Asíntotas horizontales

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3} & 2x^2 - 8 \\ \hline -\cancel{x^3} + 4x & \frac{1}{2}x \\ \hline 4x & \end{array} \Longrightarrow y = \frac{1}{2}x$$ *es asíntota oblicua*

x	0	4
y	0	2

5. a. $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-12)}{2(x^2-4)^2} = 0$

$x^2(x^2-12) = 0 \Rightarrow x=0 \wedge x=\pm 3.5$ (Valores críticos → posibles valores máx ó min)

$2(x^2-4)^2 = 0 \Rightarrow x=\pm 2 \notin$ dominio.

$\Rightarrow$ $x=\pm 2$ no son valores de cresta

b. $f''(x) = \dfrac{2x(x^2+24)}{(x^2-4)^3}$

$f''(0) = 0 \Rightarrow x=0$ es de inflexión

$f''(3.5) > 0 \Rightarrow x=3.5$ es de mínima

$f''(-3.5) < 0 \Rightarrow x=-3.5$ es de máxima

c. $f''(x) = \dfrac{2x(x^2+24)}{(x^2-4)^3} = 0 \Rightarrow 2x(x^2+24)=0$

$x=0$ $x=\pm\sqrt{-24}$ =.......i

↓

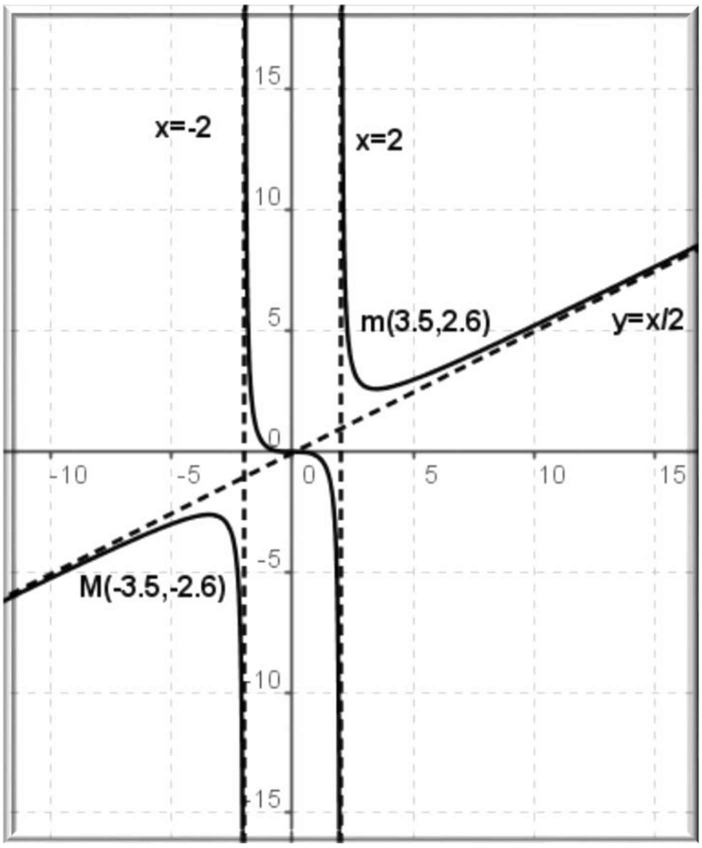
Valor de inflexión

d. $f(0) = 0 \Rightarrow$ I (0,0) ⟵ punto de inflexión

$f(3.5) = 2.6 \Rightarrow$ m (3.5,2.6)

$f(-3.5) = -2.6 \Rightarrow$ M (-3.5,-2.6)

6. Grafica



7. Crece → $x \in (-\infty, -3.5) \cup (3.5, \infty)$

Decrece → $x \in (-3.5, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 3.5)$

Cóncava hacia arriba → $x \in (-2, 0) \cup (2, \infty)$

Cóncava hacia abajo → $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$

Rango → $y \in (-\infty, \infty)$

https://www.youtube.com/watch?v=WIDKtme93_g

Ejemplo 16. Graficar $f(x) = (x-1)^3(x-3)^2$

Solución:

1. D={x ∈ R}. No hay asíntotas verticales ni puntos discontinuidad

2. Interceptos : $y=0 \Rightarrow 0=(x-1)^3(x-3)^2$

$x=1 \quad x=3 \quad \Rightarrow \begin{cases} P_1(1,0) \\ P_2(3,0) \end{cases}$

$x=0 \Rightarrow y=(0-1)^3(0-3)^2= -9 \Rightarrow P_3(0,-9)$

3. Simetrías : no hay

4. Asíntotas horizontales y oblicuas : no hay

5.a. $f'(x) = (x-3)(x-1)^2 (5x-11)=0$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

x=3 x=1 $x=\frac{11}{5}=2.2$ (Valores críticos → posibles valores máximos ó minimos)

b. $f'(x) = (x-3)(x-1)^2 (5x-11)$

$\ln f'(x)= \ln(x-3)+2 \ln(x-1)+ \ln(5x-11)$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-1} + \frac{5}{5x-11}$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-1} + \frac{5}{5x-11}\right)_x \underbrace{x(x-3)(x-1)^2(5x-11)} \longleftarrow f'(x)$$

$$f''(x)= \frac{(x-1)(5x-11)+2(x-3)(5x-11)+5(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-1)(5x-11)}.(x-3)(x-1)^2(5x-11)$$

$f''(x) = 4(5x^2-22x+23)(x-1)$

$f''(3)$ =>0 ⇒ x=3 es de mínima

$f''(1)$ =0 ⇒ x=1 es de inflexión

$f''(11/5)$ <0 ⇒ x=11/5 es de máxima

c. $f''(x) =4(5x^2-22x+23)(x-1)=0$

$\downarrow$ x=2.7 $\downarrow$ x=1 } Valores de inflexión

x=1.7

d. $f(3)= 0 \Rightarrow$ m (3,0)

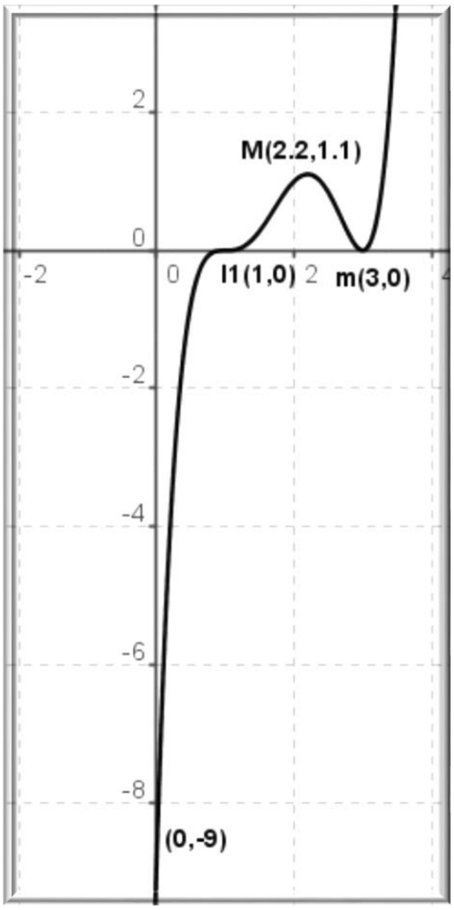
$f(1)= 0 \Rightarrow$ I_1 (1,0)

$f(2.2)= 1.1 \Rightarrow$ M (2.2,1.1)

$f(2.7)= 0.4 \Rightarrow$ I_2 (2.7,0.4)

$f(1.7)= 0.6 \Rightarrow$ I_3(1.7,0.6)

6. Gráfica



7. Crece → $x \in (-\infty, 2.2) \cup (3, \infty)$

Decrece → $x \in (2.2, 3)$

Cóncava U → $x \in (1, 1.7) \cup (2.7, \infty)$

Cóncava ∩→ $x \in (-\infty, 1) \cup (1.7, 2.7)$

Rango → $y \in (-\infty, \infty)$

<u>Ejemplo17</u>. Graficar $f(x) = x^{1/3}(x+3)^{2/3} = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$

<u>Solución:</u>

1. D={$x \in R$}. No hay asíntotas verticales ni puntos de discontinuidad

2. Interceptos : $y=0 \Rightarrow 0 = x^{1/3}(x+3)^{2/3} = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$

↓ ↓

$x=0 \quad x=-3 \Rightarrow P_1(0,0)$

$P_2(-3,0)$

$x=0 \Rightarrow \quad y = 0^{1/3}(0+3)^{2/3} = 0$

3. Simetrías : no hay

4. Asíntotas horizontales y oblicuas : no hay

5.a. $f'(x) = \dfrac{(x+1)}{x^{2/3}(x+3)^{1/3}} = 0$

(x+1)=0 $\Rightarrow$ x= -1 (Valor crítico → posible valor máx ó min)

$x^{2/3}(x+3)^{1/3} = 0$

↓↓

x=0 x= -3 (posibles valores de cresta)

x	-0.1	0	0.1	-2.9	-3	-3.1
y	-0.94	0	0.99	-0.3	0	-0.31

I (0,0) punto de inflexión

C (-3,0) punto de cresta

b. $f''(x) = \dfrac{x-1}{x^{5/3}(x+3)^{4/3}}$

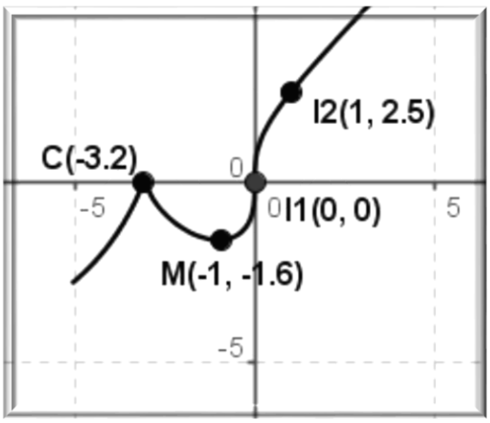
$f''(-1) > 0$ $\Rightarrow$ x= -1 es de mínima

c. $f''(x) = \dfrac{x-1}{x^{5/3}(x+3)^{4/3}} = 0$ $\Rightarrow$ x-1=0 $\Rightarrow$ x=1 valor de inflexión

d. $f(-1) = -1.6$ $\Rightarrow$ m (-1, -1.6)

$f(1) = 2.5$ $\Rightarrow$ $I_2(1,2.5)$

6. Gráfica



7. Crece → x $\in$(- ∞,-3) U (-1, ∞)

Decrece → x $\in$ (-3,-1)

Cóncava U → x $\in$ (- ∞,-3) U (-3,0) U (1,∞)

Cóncava $\cap \rightarrow$ x $\in$ (0,1)

Rango $\rightarrow$ y $\in$ (- ∞,∞)

Ejemplo 18. Graficar y = $\dfrac{(3x^{2/3}-2x)(x-5)}{(x-5)}$

Solución: . 1. D={x/x $\neq$ 5} y = $\dfrac{(3x^{2/3}-2x)(x-5)}{(x-5)}$ = $3x^{2/3}$-2x

$\downarrow$

x=5 Punto de discontinuidad P(5,-1.2)

2. Interceptos : y=0 $\Rightarrow$0 =$3x^{2/3}$-2x = x($3x^{-1/3}$ -2)= 0

$\downarrow$ $\downarrow$

x=0 $\Rightarrow$ y=0 x=0 $3x^{-1/3}$ =2$\Rightarrow \frac{3}{2}$ = $x^{1/3}$ $\Rightarrow$ x=3.4

$P_1(0,0)$ ^ $P_2(3.4,0)$

3. Simetrías : no hay

4. Asíntotas horizontales y oblicuas : no hay

5.a. $f'(x) = \dfrac{2-2x^{1/3}}{x^{1/3}}$ =0

$2-2x^{1/3}=0 \Rightarrow$ x=1 (Valor crítico $\rightarrow$ posible valor máx o min)

$x^{1/3}$ =0 $\Rightarrow$ x=0 $\in$ D (posibles valores de cresta)

x	-0.1	0	0.1
y	0.85	0	0.44

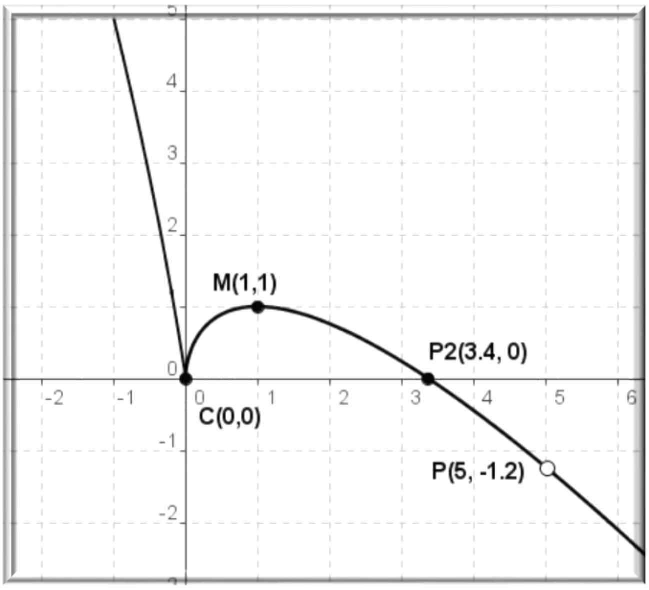
$\Rightarrow$ C(0,0) Punto de cresta

b. $f''(x) = \dfrac{-2}{3x^{4/3}}$ = 0. $f''(1)$ <0 $\Rightarrow$ x=1 es de máxima

c. $f''(x) = \dfrac{-2}{3x^{4/3}}$ =0 $\Rightarrow$ -2 = 0 (?) $\Rightarrow$ no hay Puntos de inflexión

d. $f(1)$= 1$\Rightarrow$ M (1,1)

6. Gráfica



7. Crece → x $\in$(0,1)

Decrece → x $\in$ (- ∞,0) U (1, ∞)

Cóncava U → x $\in \varnothing$

Cóncava $\cap$→ x $\in$(- ∞,0) U (0, ∞)

Rango → y $\in$ (- ∞,-1.2) U (-2.2,∞)

<u>**Ejemplo 19**</u>. Graficar f(x)= $\dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$

Solución: **1**. D={x/x $\neq$ 1}. x = 1 Asíntota Vertical

2. Interceptos : y=0 $\Rightarrow$ 0 = $\dfrac{x^3+2x^2)}{(x-1)^2}$ $\Rightarrow$ $x^3+2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x+2) = 0$

3. Simetrías : no hay x=0 x= -2$\Rightarrow$ $P_1(0,0)$

$P_2(-2,0)$

4. Asíntotas horizontal no hay

x	0	-4
y	4	0

***f*(x)=** $\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-2x+1} \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3+2x^2-x} & x+4 \\ 4x^2-x & \\ \underline{-4x^2+8x-4} & \\ 7x-4 & \end{array}$$

4x²-x $\Rightarrow$ y=x+4 Asíntota oblicua

5.a. f'(x) = $\dfrac{x(x-4)(x+1)}{(x-1)^3}$ =0 x (x - 4)(x + 1) =0

↓ ↓ ↓

x=0 x=4 x= -1 (Valores críticos → máx o min posibles)

$(x-1)^3 = 0 \Rightarrow$ x=1 $\notin$ D (no hay puntos de cresta)

b. $f''(x) = \dfrac{14x+4}{(x-1)^4}$

$f''(0) > 0 \Rightarrow$ x=0 es de mínima

$f''(4) > 0 \Rightarrow$ x=4 es de mínima

$f''(-1) < 0 \Rightarrow$ x=-1 es de máxima

c. $f''(x) = \dfrac{14x+4}{(x-1)^4} = 0 \Rightarrow 14x+4=0 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{7} = -0.3$ → Valor de inflexión

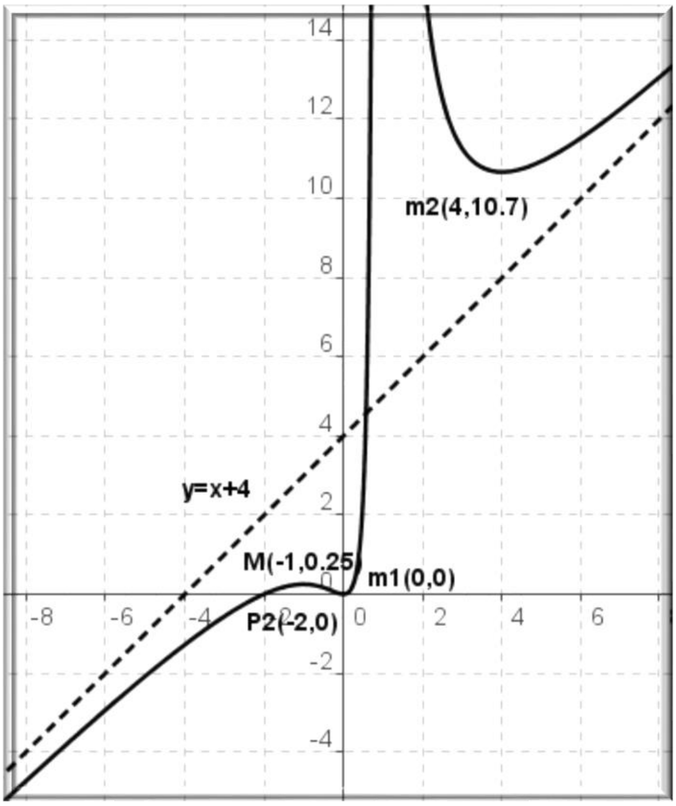
d. $f(0) = 0 \Rightarrow m_1\,(0,0)$

$f(4) = 10.7 \Rightarrow m_2(4,10.7)$

$f(-1) = 0.25 \Rightarrow$ M (-1,0.25)

$f(-0.3) = 0.09 \Rightarrow$ I (-0.3,0.09)

6. Gráfica



7. Crece → $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1) \cup (4,\infty)$

Decrece → $x \in (-1,0) \cup (1,4)$

Cóncava U → x ∈ (-0.3,1) U (1, ∞)

Cóncava ∩→ x ∈ (- ∞,-0.3)

Rango → y ∈ (- ∞,+∞)

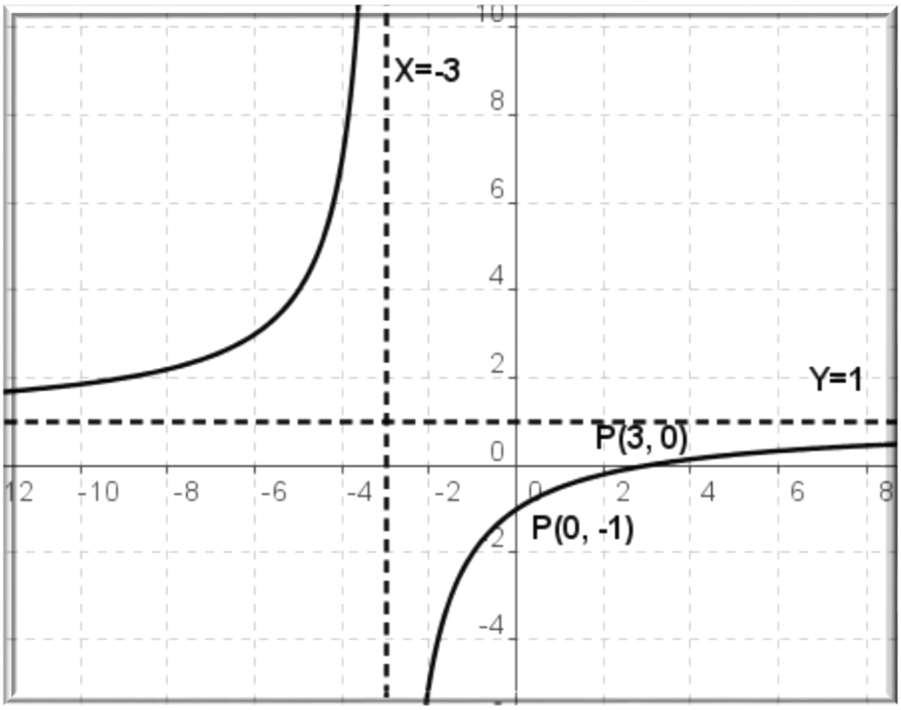
Ejemplo 20: Dada $y=\frac{x-3}{x+3}$, hallar los interceptos y asíntotas.

Solución: Asíntota V : x = -3

Asíntota H: y =1 (1/1→ coeficiente de x en el numerador, Dividido coeficiente de x en el denominador)

Interceptos con "x" : $0=\frac{x-3}{x+3}\Rightarrow x-3=0\Rightarrow x=3\Rightarrow$ P(3,0)

Intercepto con "y" : $y=\frac{0-3}{0+3}=1\Rightarrow$ P(0,-1)



Ejemplo 21: $f(x)=\frac{x^2+2x-4}{x^2}$

Solución

a. D= $\{x/x\neq 0\}$ A.V → x = 0

b. Interceptos: con eje x $\Rightarrow y=0\Rightarrow 0=x^2+2x-4\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{2}$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{2}\begin{cases}x_1=1.2\to P_1(1.2,\,0)\\ x_2=-3.2\to P_2(-3.2,\,0)\end{cases}$$

con eje y $\longrightarrow$ no hay

c. Simetrías: no hay

d. Asíntotas: Oblicuas $\longrightarrow$ no hay; A.H $\longrightarrow$ y = 1

e. $f(x)=\dfrac{(2x+2)x^2-2x\left(x^2+2x-4\right)}{x^4}=\dfrac{x\left(2x^2+2x-2x^2-4x+8\right)}{x^3}$

$f´(x)=\dfrac{-2x+8}{x^3}=0\Longrightarrow$ -2x+8 = 0 $\Rightarrow$x = 4 (valor crítico)

$$f''(x)=\frac{-2x^3-3x^2(-2x+8)}{x^6}=\frac{-2x^3+6x^3-24x^2}{x^6}=\frac{4x^3-24x^2}{x^6}$$

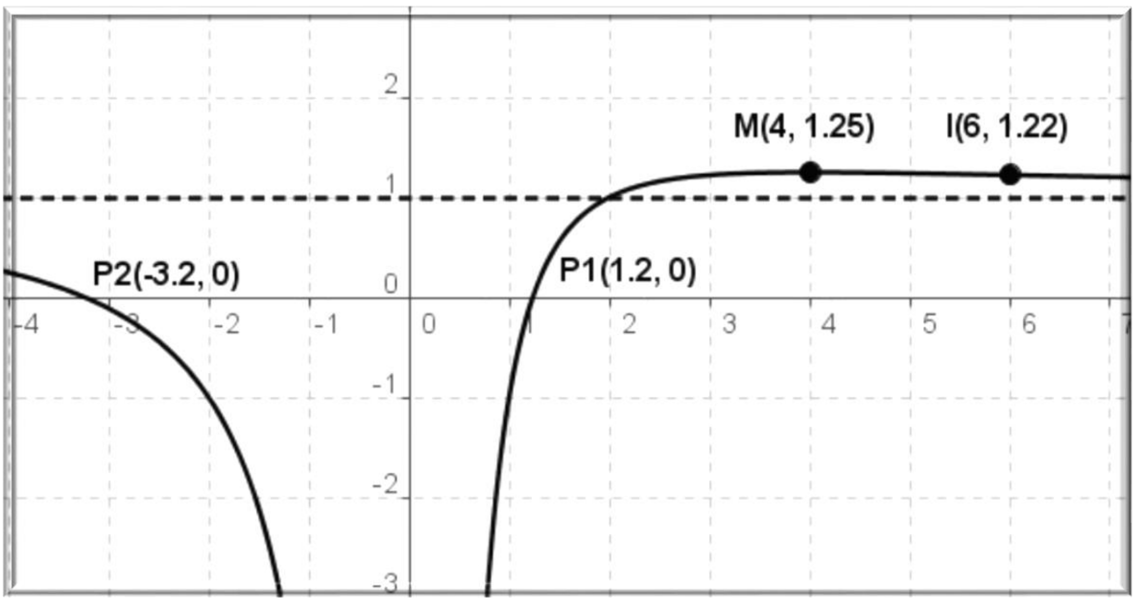
$f''(x)=\dfrac{4x^2(x-6)}{x^4}\Rightarrow f''(x)=\dfrac{4x(x-6)}{x^4}\Rightarrow f''(4)\langle 0\Rightarrow$ x = 4 es de máxima.

$f''(x)=\dfrac{4x(x-6)}{x^4}=0\Rightarrow$ x = 6 (valor de inflexión)

$f''(4)=\dfrac{20}{16}=\dfrac{5}{4}=1.25\Rightarrow M(4{,}1.25)$;

$f''(6)=\dfrac{44}{36}=\dfrac{11}{9}=1.22\Rightarrow I(6{,}1.22)$

f.



g.

crece $\rightarrow x \in (0, 4)$

Decrece $\rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

Cóncava $\cup \rightarrow x \in (6, \infty)$

Cóncava $\cap \rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, 6)$

Dominio $\rightarrow x \in (-\infty, 1.25]$

Rango $\rightarrow y \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Ejemplo 22: $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x + 1}{x^2}$

Solución:

a. D = { x/x ≠ 0 } x = 0 $\rightarrow$ A.V

b. Interceptos: Con x $\Rightarrow$ y = 0 $\Rightarrow$ 0 = x^3+3x+1 $\Rightarrow \underbrace{x^3 + 3x + 1}_{g(x)} = 0$

g(1)=5≠0 y g(-1)=-3≠0; $\Rightarrow$ hay intercepto con “x” entre 1y -1

- Con y $\Rightarrow$ x = 0 $\Rightarrow$ y = ? No hay

c. Simetrías: No hay

d. Asíntotas: Horizontales no hay; y oblicuas $\rightarrow$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x + 1 & x^2 \\ \hline -x^3 & x \\ \hline 3x + 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ y = x es Asíntota Oblicua

e. Max, min, inf, crestas:

- $$f(x) = \frac{(3x^2 + 3)x^2 - 2x(x^3 + 3x + 1)}{x^4} = \frac{3x^3 + 3x - 2x^3 - 6x - 2}{x^3}$$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{x^3 - 3x - 2}{x^3}} = 0 \Rightarrow \underbrace{x^3 - 3x - 2}_{g(x)} = 0$$

$\underbrace{x = 0 \notin D}$ $g(x) \Rightarrow g(-1) = 0 \Rightarrow x + 1$ es factor

No hay crestas

	1	0	-3	-2
X = - 1		-1	1	2
	1	-1	-2	0

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) \Rightarrow (x+1)^2(x-2) = 0$$

x = -1 x = 2 (valores críticos)

$$f''(x) = \frac{(3x^2-3)x^3 - 3x^2(x^2-3x-2)}{x^5} = \frac{3x^3 - 3x - 3x^3 + 9x + 6}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{6x+6}{x^4} \Rightarrow f''(-1) = \frac{-6+6}{1} = 0 \Rightarrow x = -1$$ es de inflexión

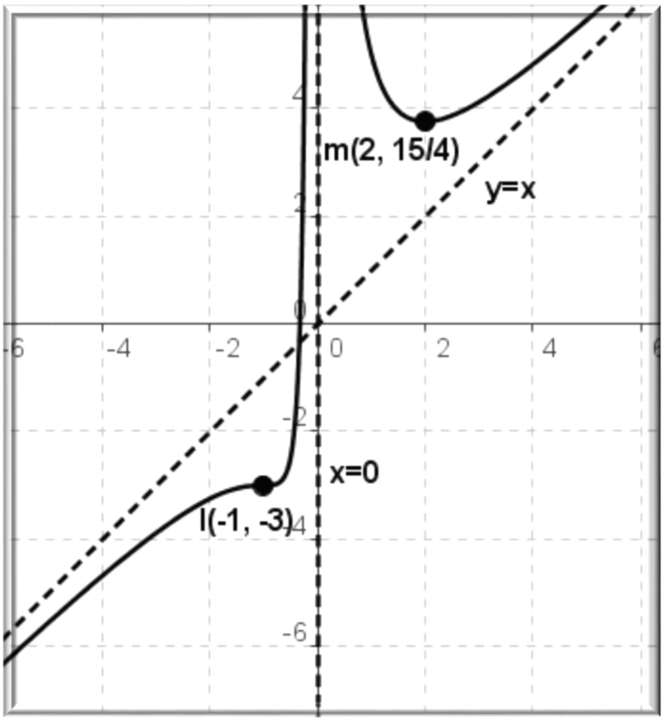
$f''(2) = \frac{+}{+} > 0 \Rightarrow x = 2$ es de mínima

$f''(x) = \frac{6x+6}{x^4} = 0 \Rightarrow x = -1$ Inflexión

$$f(-1) = \frac{-1-3+1}{1} = -3 \Rightarrow I(-1,-3)$$

$$f(2) = \frac{8+6+1}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \Rightarrow m(2, 3\frac{3}{4})$$

f. Gráfica



g.

Rango $\rightarrow y \in (-\infty, \infty)$

Crece $\rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

Decrece $\rightarrow x \in (0,2)$

Cóncava $\cup \rightarrow x \in (-1,0) \cup (0, \infty)$

Cóncava $\cap \rightarrow x \in (-\infty, -1)$

Ejemplo 23: $f(x) = \dfrac{2 + x - x^2}{(x-1)^2}$

Solución: $f(x) = \dfrac{-(x^2 - x - 2)}{(x-1)^2} = \dfrac{-(x-2)(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{(2-x)(x+1)}{(x-1)^2}$

a. $D = \{x / x \neq 1\}$ $x = 1 \rightarrow$ Asíntota vertical

b. Interceptos: Con $x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{(2-x)(x+1)}{(x-1)^2} \Rightarrow (2-x)(x+1) = 0$

$x = 2$ $x = -1$

$P_1(2,0)$ $P_2(-1,0)$

Con y $\Rightarrow$ x = 0 $\Rightarrow$ y = 2/1 = 2 $\Rightarrow$ $P_3(0, 2)$

c. Simetrías: No hay

d. Asíntotas: Horizontales y = -1 y oblicuas no hay

e. Max, min, inf, crestas:

- $f'(x) = \dfrac{(1-2x)(x+1)-2(x-1)(2+x-x^2)}{(x-1)^4} = \dfrac{x-1-2x^2+2x-4-2x+2x}{(x-1)^3}$

$$f'(x) = \frac{x-5}{\underbrace{(x-1)^3}_{x=1\notin D}} = 0 \Rightarrow x = 5 \quad (valor\ crítico)$$

$$\Rightarrow no\ hay\ \ puntos\ de\ cresta$$

$$f''(x) = \frac{1(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x-5)}{(x-1)^6} = \frac{-2x+14}{(x-1)^4}$$

$$f''(5) = \frac{-10+14}{(5-1)^4} = \frac{+}{+} > 0 \quad \Rightarrow x = 5 \quad es\ valor\ de\ minima$$

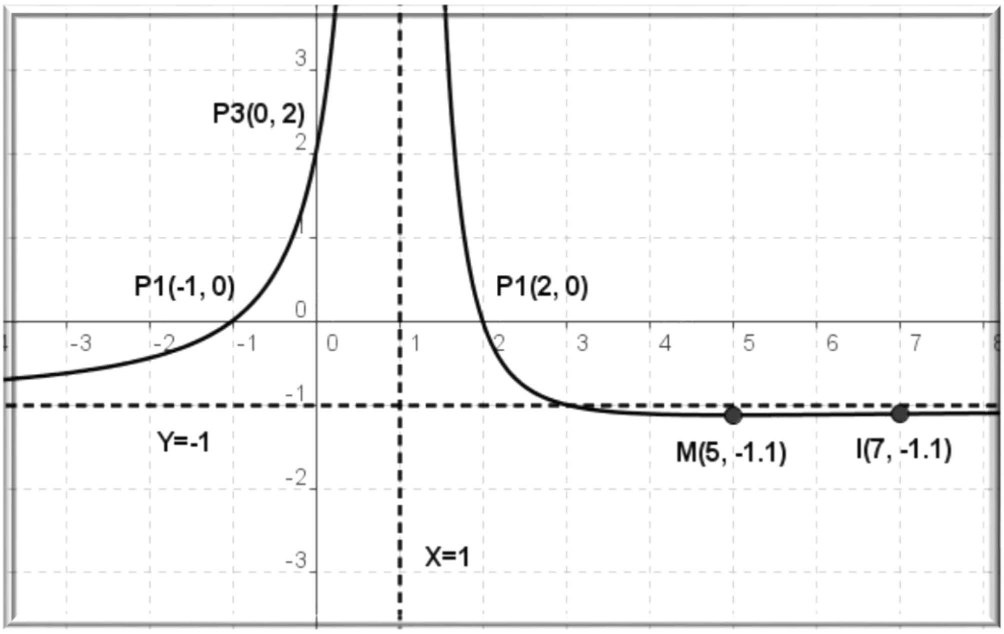
$f''(x) = \dfrac{-2x+14}{(x-1)^4} = 0 \quad \Rightarrow x = 7$ es valor de inflexión

$$f(5) = \frac{2+5-25}{(5-1)^2} = \frac{-18}{16} = \frac{-9}{8} = -1\frac{1}{8} \Rightarrow m(5, -1\frac{1}{8})$$

$$f(7) = \frac{2+7-49}{(7-1)^2} = \frac{-40}{36} = \frac{-10}{9} = -1\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow I(7, -1\frac{1}{9})$$

f. Gráfica



g. Rango $\rightarrow y \in \left[-1\frac{1}{8}, \infty\right)$

Crece $\rightarrow x \in (-\infty,1) \cup (5,\infty)$

Decrece $\rightarrow x \in (1,5)$

Cóncava $\cup \rightarrow x \in (-\infty,1) \cup (1,7)$

Cóncava $\cap \rightarrow x \in (7,\infty)$

Ejemplo 24: $f(x) = \dfrac{(x^3 + x)(2x-1)}{(x^2-1)(2x-1)}$

Solución: $f(x) = \dfrac{x(x^2+1)(2x-1)}{(x-1)(x+1)(2x-1)}$

x=1 y x=-1 son Asíntotas verticales; y x=1/2 es Punto de discontinuidad

a. D= $\left\{x / x \in R / x \neq \pm 1, \ ^1\!/_2\right\}$

b. Interceptos: Con x $\Rightarrow$ y=0 $\Rightarrow$ 0= $\dfrac{x(x^2+1)}{x^2-1}$ $\Rightarrow$ 0= x(x^2+1)

X =0 $\Rightarrow$ P_1(0,0)

✓ Con y $\Rightarrow$ X=0 $\Rightarrow$ y= $\dfrac{0+0}{0-1} = 0$

c. Simetrías: -y= $\dfrac{((-x)^3+(-x))}{((-x)^2-1)} \Rightarrow \dfrac{-x^3-x}{x^2-1} \rightarrow x-1 \Rightarrow y=\dfrac{x^3+x}{x^2-1}$

$\Rightarrow$ Simetría con respecto al origen

d. Asíntotas: Horizontales no hay y oblicuas: $\begin{array}{r|l} x^3+x & x^2-1 \\ -x^3+x & x \\ \hline 2x & \end{array}$

y=x es asíntota vertical

e. $y=\dfrac{x^3+x}{x^2-1} \Rightarrow$

$$y'=\frac{(3x^2+1)((x^2-1)-2x(x^3+x))}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2+x^2-1-2x^4-2x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^2-?)(x^2+?)}{(x^2-1)^2}$$

$f'(x)=0$ donde x^4-$4x^2$-1=0 $\Rightarrow x^2=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4(1)(-1)}}{2(1)}=\dfrac{4\pm 4.5}{2}$

x_1^2=4.2 $\Rightarrow$ x_1=± 2.1 Valores críticos: posibles valores de máx o min.

X_2^2=-0.3 $\Rightarrow$ x_2=± i

$f'(x)=$no existe, donde $(x^2-1)^2$=0

x= ±1 ∉ Dominio $\Rightarrow$ x= ±1 no son de cresta

$$f''(x)=\frac{\overbrace{(4x^3-8x)}^{4x\left(x^2-2\right)}\left(x^2-1\right)^2-2\left(x^2-1\right)(2x)\left(x^4-4x^2-1\right)}{(x^2-1)^4}$$

$$=\frac{4x(x^2-1)\left[(x^2-2)(x^2-1)-(x^4-4x^2-1)\right]}{(x^2-1)^3}=\frac{4x\left(x^4-3x^2-x^4+4x^2+1\right)}{(x^2-1)^3}$$

$f''(x)=\dfrac{4x(x^2+1)}{(x^2-1)^3}=0$ $\Rightarrow$ x=0 valor de inflexión

$f''(2.1)>0 \Rightarrow$ x=2.5 es de mínima

$f''(-2.1)<0 \Rightarrow$ x=-2.1 es de máxima

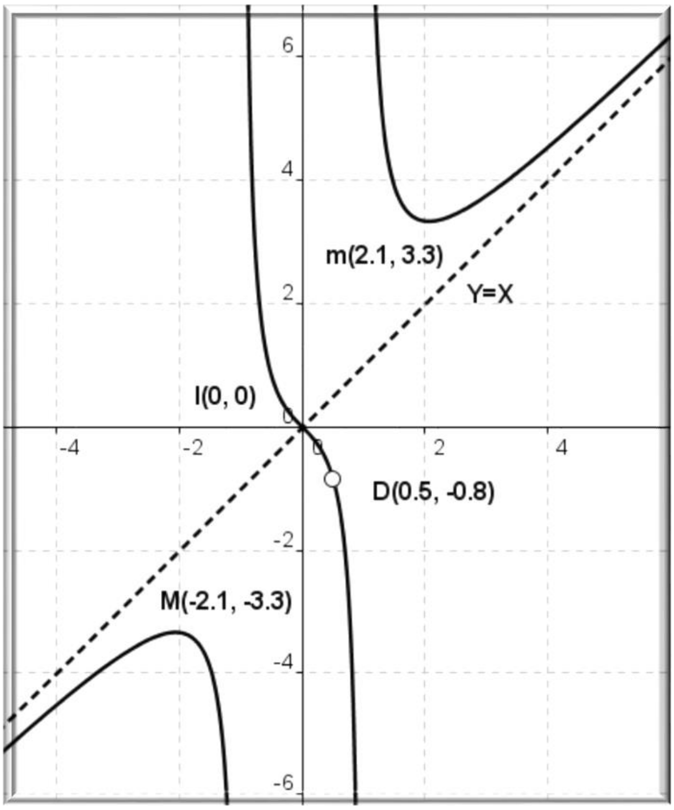
$f(0)=0 \Rightarrow$ $P_1(0,0)$ punto de inflexión

$f(2.1)=3.3 \quad \Rightarrow$ m(2.1, 3.3) punto de mínima

$f''(-2.1)=-3.3 \Rightarrow$ M(-2.1, -3.3) valor de máxima

$f''(1/2)=-0.8 \Rightarrow$ D(0.5, -0.8) valor de discontinuidad

g. Gráfica



g. Rango $\rightarrow y \in (-\infty, \infty)$

Crece $\rightarrow x \in (-\infty, -2.1) \cup (2.1, \infty)$

Decrece $\rightarrow x \in (-2.1, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2.1)$

Cóncava $\cup \rightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$

Cóncava $\cap \rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

5.15. EJERCICIOS PROPUESTOS SOBRE GRAFICA DE ECUACIONES

En los ejercicios (del 1 – 13) analice las curvas

1. y = $x^4 - 6x^2$	**2.** y = $\dfrac{1}{x^2-9}$	**3.** y = $\dfrac{x}{(2x-3)^2}$

4. y= $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$	**5.** y = $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$	**6.** y = $\dfrac{1}{x} - \sqrt{x}$
7. y = $\sqrt[4]{x^2-25}$	**8.** y = $x\sqrt{x^2-9}$	**9.** y = $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
	10. y = $\dfrac{1}{x-1} - x$	

Soluciones:

1. **(a)** R

(b) Intercepción "y": 0; intercepciones "x": 0, $\pm\sqrt{6}$

(c) Con respecto al eje y

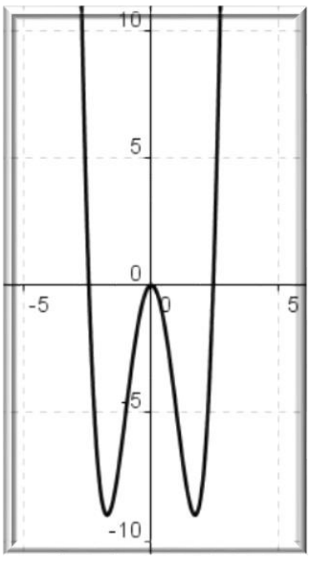
(d) Ninguna

(e) Creciente en [-$\sqrt{3}$ .0] y [$\sqrt{3},\infty$) decreciente en (- ∞,- $\sqrt{3}$] y [0, $\sqrt{3}$]

(f) Mínimos locales f ($\pm\sqrt{3}$) = -9, máximo f (0) = 0

(g) CAR en (- ∞, -1) y (1, ∞), CAB en (-1,1), PI (1,-5) y (-1,-5)

(h)



2. **(a)** { x I x ≠ ± 3 }

(b) Intercepción "y": -1/9

(c) Con respecto al eje y

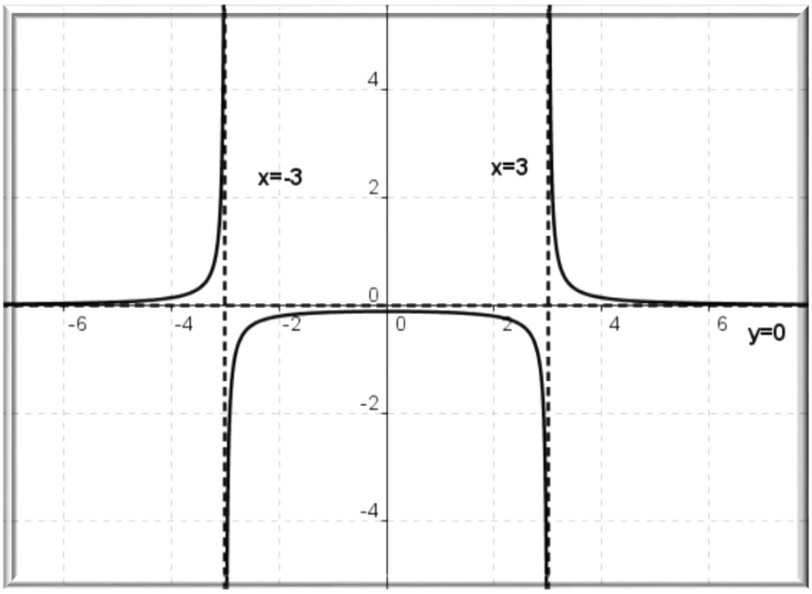
(d) AV: $x = \pm 3$, AH: $y = 0$

(e) Creciente en $(-\infty, -3)$ y $(3, \infty)$, no hay PI

(f) Máximo local $f(0) = -1/9$

(g) CAR en $(-\infty, -3)$ y $(3, \infty)$, CAB en $(-3,3)$ no hay PI

(h)



3. **(a)** $\{x \mid x \neq 3/2\}$

(b) Intercepción “x”: 0, intercepción “y”: 0

(c) Ninguna

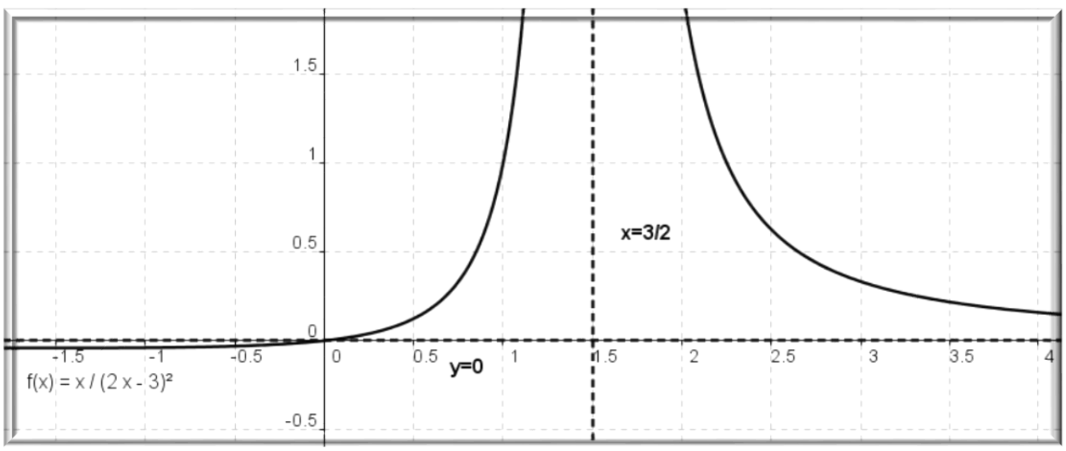
(d) AH: y =0, AV: x = 3/2

(e) Decreciente en (-x, -3/2] y (3/2, ∞), creciente en [-3/2, 3/2] [0, 3) y (3, ∞)

(f) Mínimo local f (-3/2) = -1/24

(g) CAB en (- ∞, -3), CAR en (-3, 3/2) y (3/2, x), PI (-3, -1/27)

(h)



4. **(a)** $\{x \mid x \neq 1, -2\}$

(b) Intercepción “y”: -1/2

(c) Ninguna

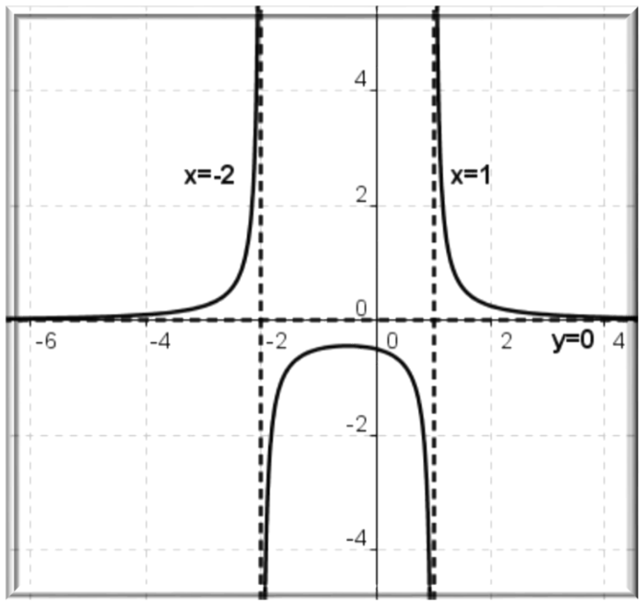
(d) VA: x = 1, x= -2 , HA: y = 0

(e) Creciente en (- ∞, -2) y (-2, -1/2], decreciente en [-1/2, 1) y (1, ∞)

(f) Máximo local f (-1/2) = -4/9

(g) CAR en (- ∞, -2) y (1, ∞), CAB en (-2,1), ningún PI

(h)



5. **(a)** $\{x \mid x \neq \pm 1\}$

(b) Intercepción “y”: 1

(c) Con respecto al eje y

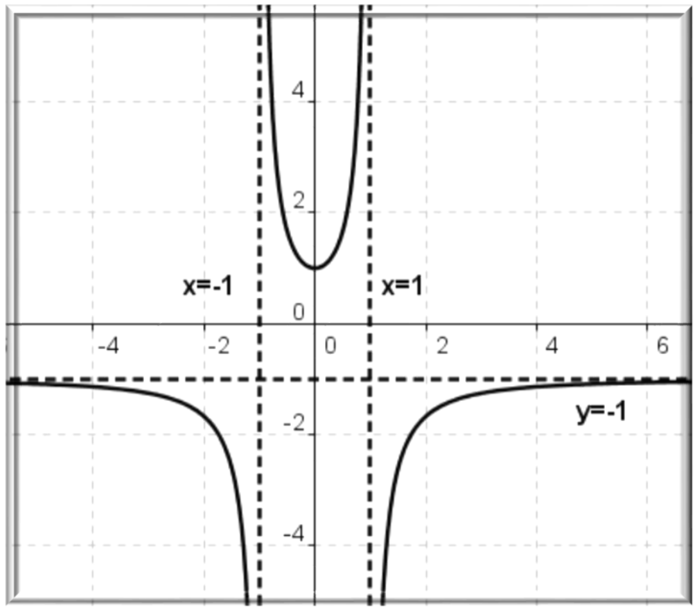
(d) AV: $x = \pm 1$, AH: $y = -1$

(e) Decreciente en $(-\infty, -1)$ y $(-1,0)$, creciente en $[0,1)$ y $(1, \infty)$

(f) Mínimo local f (0) = 1

(g) CAB en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$, CAR en $(-1,1)$, ningún PI

(h)



6. **(a)** $(0, \infty)$

(b) Intercepción "x": 1

(c) Ninguna

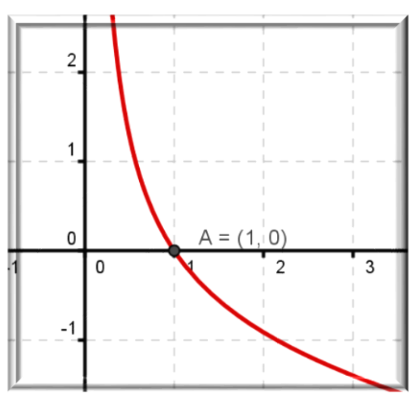
(d) AV: X = 0

(e) Decreciente en $(0, \infty)$

(f) No hay máximo ni mínimo local

(g) CAR en $(0, \infty)$, ningún PI

(h)



7. **(a)** {x I IxI $\geq$ 5} = (- ∞, -5] u [5, ∞)

(b) Intercepciones "x": = $\pm$5

(c) Con respecto al eje y

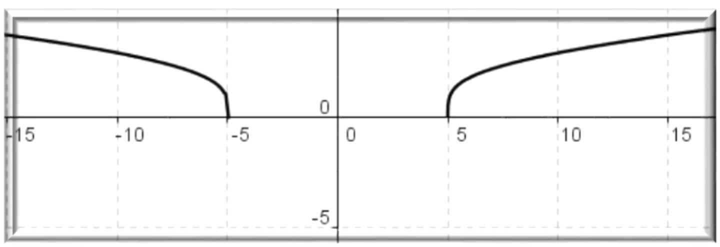
(d) Ninguna

(e) Decreciente en (- ∞, -5), creciente en [5, ∞)

(f) No hay máximo o mínimo local

(g) CAB en (- ∞, -5) y (5, ∞), CAR en (-1, 1), ningún PI

(h)



8. **(a)** { x I IxI $\geq$ 3} = (- ∞, -3] u [3, ∞)

(b) Intercepciones "x": = $\pm$3

(c) Con respecto al eje y

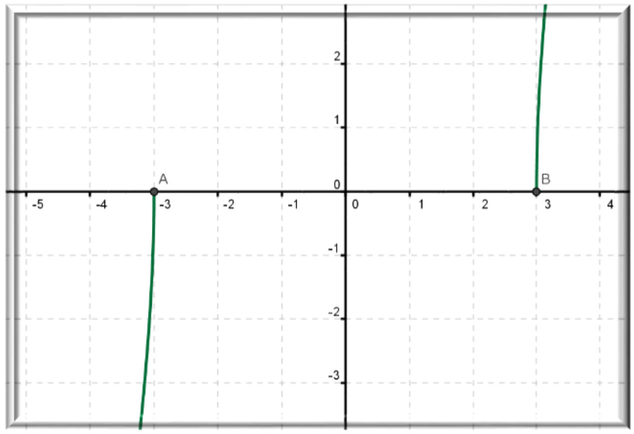
(d) Ninguna

(e) Creciente en (- ∞, -3] y [3, ∞)

(f) No hay máximo o mínimo local

(g) CAR en (-3 $\sqrt{3/2}$, -3) y (-3 $\sqrt{3/2}$, ∞), CAB en (- ∞, -3 $\sqrt{3/2}$) y (3, 3 $\sqrt{3/2}$), PI cuando x = $\pm 3\sqrt{3/2}$

(h)



9. (a) $\{x \text{ I } x \geq 1, x = 0\} = [-1, 0) \text{ u } (0, 1]$

(b) Intercepciones "x": = ± 1

(c) Con respecto a (0,0)

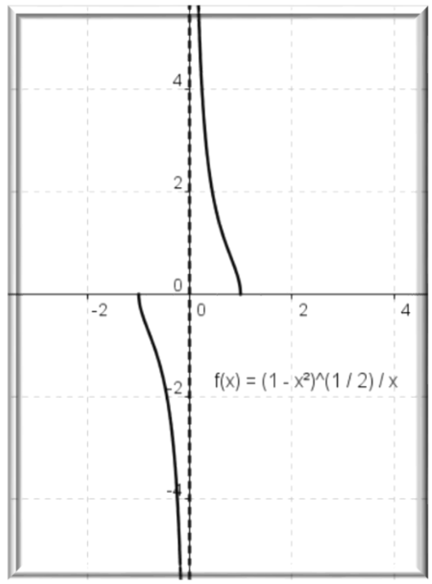
(d) AV: $x = 0$

(e) Decreciente en $[-1, 0)$ y $(0,1]$

(f) No hay máximo o mínimo local

(g) CAR en $(-1, -\sqrt{2/3})$ y $(0, \sqrt{2/3})$, CAB en $(-\sqrt{2/3}, 0)$ y $(\sqrt{2/3}, 1)$, PI (= $\sqrt{2/3}$, = $1/\sqrt{2}$)

(h)



10. (a) {x l x ≠ 1}

(b) Intercepción "y": -1, intercepciones "x": (1 ± $\sqrt{5}$) /2

(c) Ninguna

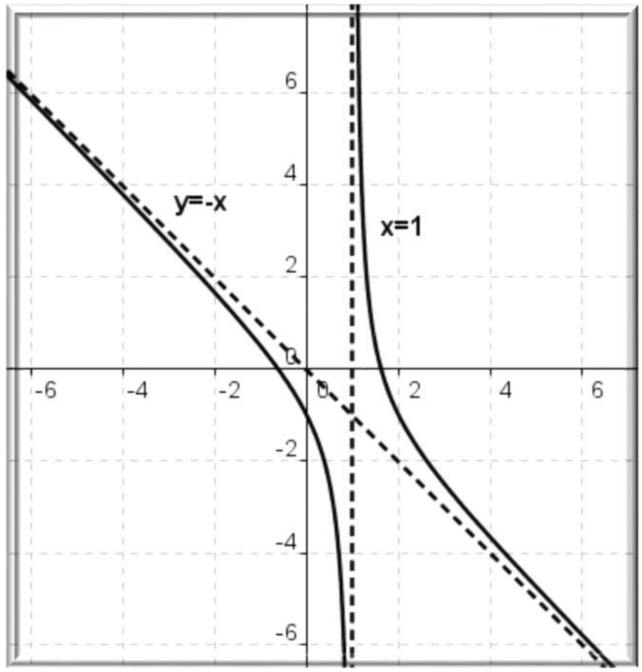
(d) AV: x = 1, asuntota oblícua: y= -x

(e) Decreciente en (- ∞, 1) y (1, ∞)

(f) No hay máximo ni mínimo local

(g) CAB en (- ∞, 1), CAR en (1, ∞), ningún PI

(h)


y=-x
x=1
6
4
2
0
-2
-4
-6
-6
-4
-2
0
2
4
6

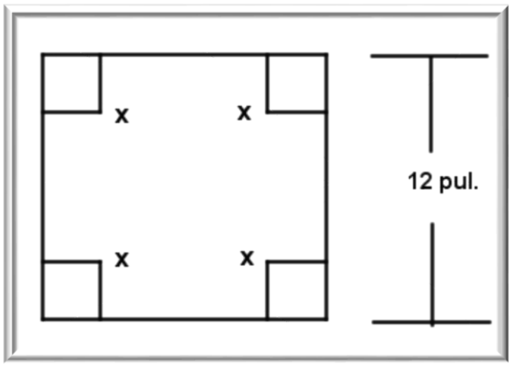
5.16. OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES (PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS)

Optimizar algo significa que se maximiza o se minimiza algo de sus aspectos. ¿De qué tamaño es más rentable una línea de producción? ¿Cuál es el diseño que abarata el costo de una lata? ¿Cuál es la viga más rígida que se puede cortar de un tronco de 12 pulgadas?. Preguntas como éstas se pueden contestar usando modelos matemáticos en donde se establecen funciones para describir las cosas que nos interesan. Usualmente se contestan al encontrar el valor más grande o más bajo de una función diferenciable.

Estrategia para resolver problemas de máx.-mín.

- ✓ Leer el problema. ¿Cuál es la incógnita? ¿Qué información se da? ¿Qué se busca?
- ✓ Haz un dibujo. Identifica las partes importantes del problema.
- ✓ Introduce las variables. Haz una lista con todas las relaciones del dibujo y del problema como una ecuación o una expresión algebraica.
- ✓ Identifica la incógnita, escribe una ecuación para ella. Si puedes, expresa la incógnita como una función de una sola variable o en dos ecuaciones con dos incógnitas. Esto puede requerir cálculos considerables.
- ✓ Haz la prueba con los puntos críticos y con los puntos extremos.

Ejemplo 1**(Fabricación de metal).** Se requiere hacer una caja sin tapa cortando cuadrados congruentes de las esquinas de una hoja de lámina de 12x12 pulgadas y doblando sus lados. ¿De qué tamaño deben ser los cuadrados que se corten de las esquinas para que la caja tenga el volumen máximo?



En la figura, los cuadrados de las esquinas tienen x pulgadas de lado. El volumen de la caja es una función de esa variable:

$V(x) = x(12 - 2x)^2 = 144x - 48x^2 + 4x^3$

Dado que los lados de la lámina miden solamente 12 pulgadas de largo, $x \leq 6$.

Derivamos v(x) para encontrar sus puntos críticos: $V'(x) = 144 - 96x + 12x^2 = 12(12-8x + x^2) = 12(2-x)(6-x)$.

De los dos ceros, x = 2 y x = 6, solo x = 2 cae dentro del dominio de la función y está dentro de la lista de puntos críticos. Para este valor de x, el volumen máximo de la caja es de 128 p^3.

__Ejemplo 2__ **(Producto de números).** Encuentre dos números positivos, cuya suma sea 20 y cuyo producto sea lo más grande posible.

Solución: Si su número es ″x″, el otro es (20 – x). Su producto será:

$$F(x) = (20-x) = 20x - x^2$$

Se busca un valor o valores de x que hagan F (x) tan grande como sea posible. El dominio de F es el intervalo cerrado $0 \leq x \leq 20$.

Se evalúa F en sus puntos críticos y en sus puntos extremos. La primera derivada,

$$F'(x) = 20 - 2x$$

Está definida en cada punto del intervalo $0 \leq x \leq 20$ y es cero solo en x = 10. Al enumerar los valores de F en este punto crítico y en los puntos extremos, se tiene:

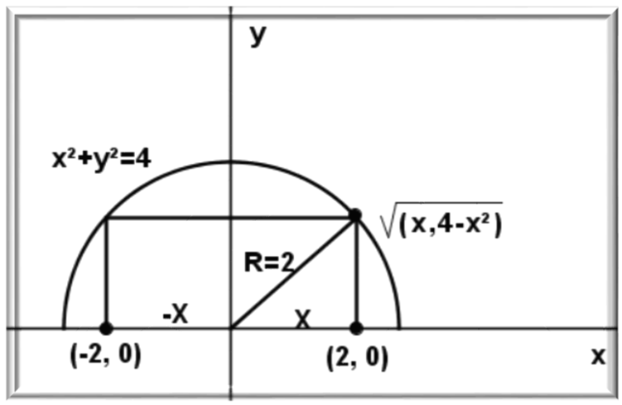
Valor del punto crítico: $F(10) = 100$

Valor de los puntos extremos: $F(0) = 0$, $f(20) = 0$.

Se concluye que el valor máximo es F(10) = 100. Los números correspondientes son x = 10 y Y = 10.

<u>Ejemplo 3</u> (Geometría). Se quiere inscribir un rectángulo dentro de un semicírculo de radio 2. ¿Cuál es el área más grande que puede tener el rectángulo, y cuáles son sus dimensiones?

Solución:



Para describir las dimensiones del rectángulo, colocamos el circulo y el rectángulo en un plano coordenado. Entonces, el largo, la altura y el área del rectángulo se pueden expresar en términos de la posición x de la esquina inferior derecha:

Largo: 2x Altura: $\sqrt{4-x^2}$ Área: $2x.\sqrt{4-x^2}$

Observe que los valores de x se hallarán entre $0 \leq x \leq 2$, donde está la esquina escogida del rectángulo.

El objetivo matemático es hallar ahora el valor máximo absoluto de la función continua en el dominio [0,2]:

$$A(x) = 2x.\sqrt{4-x^2}$$

Esto se logra examinando los valores de A en sus puntos críticos y en sus puntos extremos. La derivada es igual:

$$\frac{dA}{dX} = \frac{8-4x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

A(x) no está definida cuando x = 2, y es igual a cero cuando:

$$8 - 4x^2 \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt{2}.$$

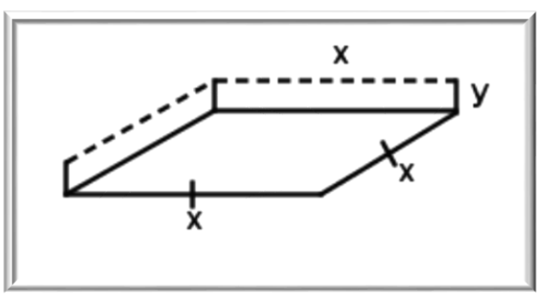
De los dos ceros solo x = $\sqrt{2}$ cae dentro del dominio de A y está en la lista de puntos críticos. Los valores de A en los puntos extremos y en este punto crítico son:

Valor del punto crítico: $A(\sqrt{2}) = 4$

Valor de los puntos extremos: $A(0) = 0.$ $A(2) = 0.$

El área tiene un valor de 4 cuando el rectángulo tiene $\sqrt{2}$ unidades de alto y 2 $\sqrt{2}$ unidades de largo.

***Ejemplo 4*.** Se quiere construir una caja abierta con base cuadrada, empleando 108 pulgadas cuadradas de material. ¿Qué dimensiones producirán una caja de volumen máximo?



Solución: $V = x^2y$ (1) y=?

$A = x^2+4xy = 108''^2$ (2)

(2)→ $y = \dfrac{108 - x^2}{4x}$ (2)´ en (1)

$V = x^2 . \dfrac{108 - x^2}{4x} \Rightarrow V = 27x - \dfrac{1}{4}x^3$

$V'(x) = 27 - \frac{3}{4}x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 6 \quad x = 6''$ Valor critico

X	5.9	6	6.1
V	107.96	108	107.95

Veamos si es de máximo o mínimo :

$\Rightarrow$ x=6 es de máxima

También se puede : V”(x) = $-\frac{3}{2}x$

V”(6) < 0 $\Rightarrow$ x=6” es de máxima.

Se aplica el método más conveniente

x=6 en (2)´ → y=3”

Ejemplo 5. Hallar los números positivos que minimicen la suma del doble del primero más el segundo, si el producto de dichos números es 288.

Solución : x, y → Números

s= 2x+y (1) x.y = 288 $\Rightarrow$ y= $\frac{288}{x}$ (2)

(2) en (1) → s= 2x+288x^{-1} = 2x+ $\frac{288}{x} = \frac{2x^2+288}{x}$

x	11.9	12	12.1
S	48^+	48	48^+

$\frac{ds}{dx} = 2 - \frac{288}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 12 \quad \Rightarrow \quad x = 12$

$\Downarrow$

x=12 (mínima)

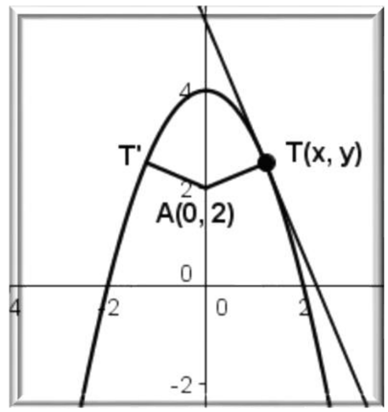
x=12 en (2) → y=24

Ejemplo 6. Hallar los puntos de la gráfica de $y=4-x^2$ que están más próximos del punto(0,2).

Solución :

X	0	1	-1	2	-2
Y	4	3	3	0	0

$y= 4-x^2$ (1)



$$\frac{dy}{dx} = -2x = m$$ (Tangente)

$m_{\overline{AT}} = \frac{1}{2X}$

$\downarrow$

$\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{1}{2X} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y-2}{X-0} = \frac{1}{2X}$ (2)

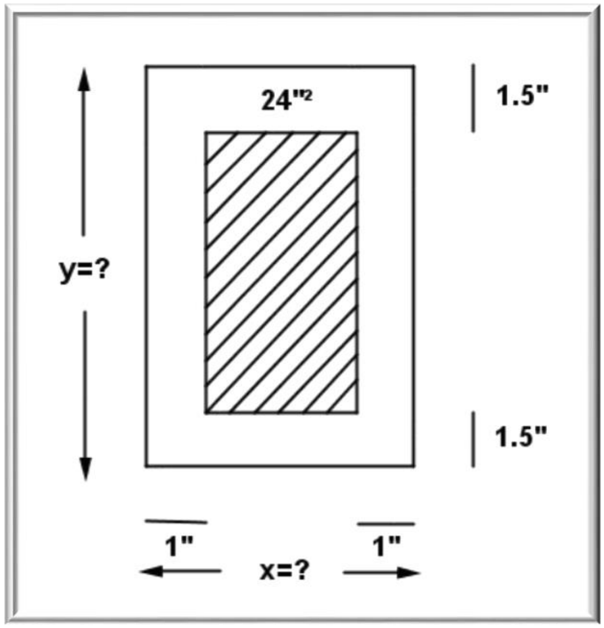
(1) en (2) $\rightarrow \frac{4 - X^2 - 2}{X} = \frac{1}{2X} \quad \Rightarrow \quad 2 - x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 4-2x^2 = 1$

$2x^2-3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ en (1) $\rightarrow$ $y = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow \quad T\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right), \quad T'\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$

Ejemplo 7: Una página tiene margen superior e inferior de 1,5 pulgadas, y el texto de forma rectangular contiene 24 pulgadas cuadradas. Las márgenes laterales tienen 1 pulgada. ¿ Que dimensiones de la página minimizan la cantidad de papel requerida?

Solución : A = x.y (1)



24 = (x-2)(y-3) $\Rightarrow \dfrac{24}{x-2}+3=y$

$$y=\frac{24+3x-6}{x-2}=\frac{18+3x}{x-2}\ (1)$$

$$(2)\ en\ (1)\rightarrow A=x\left(\frac{18+3x}{x-2}\right)=\frac{18x+3x^2}{x-2}$$

$$\frac{dA}{dx}=\frac{(x-6)(x+2)}{(x-2)^2}=0\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x=6\\x=-2\end{matrix}\right\}$$

x	5.9	6	6.1
A	54^+	54	54^+

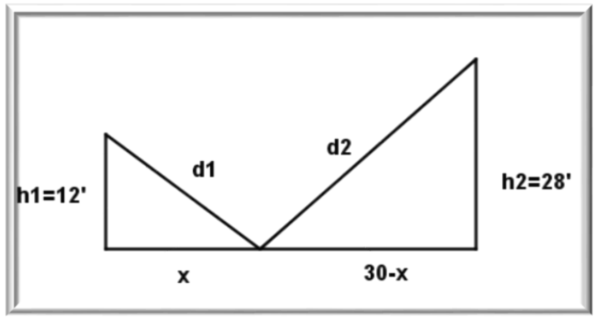
$\Rightarrow$ x=6" es de mínima; x=6 en (2) → y = 9"

Ejemplo 8. Dos postes de 12 y 28 pies de altura, distan 30 pies entre sí. Desea tenderse un cable, fijado en un único punto del suelo, entre las puntas de ambos postes. ¿En qué punto del suelo hay que fijar el cable para usar el mínimo cable posible?

Solución : $m = d_1+d_2$ (1)

$d_1 = \sqrt{12^2 + x^2}$

$d_2 = \sqrt{28^2 + (30-x)^2}$ (2)



(1) En (1)→

$$m = \sqrt{12^2 + x^2} + \sqrt{28^2 + (30-x)^2}$$

$$m = (x^2+144)^{1/2} + (x^2-60x+1684)^{1/2}$$

$$\frac{dm}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+144}} + \frac{x-30}{\sqrt{x^2-60x+1684}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2+27x-405 = 0$$

x	8.9	9	9.1
m	50^+	50	50^+

$$x = \frac{-27 \pm 63}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = \dfrac{-45}{2} \end{cases}$$ x=9´ es de mínima

no satisface

x= 9´ distante del poste de 12´ y 30-9=21´distante del poste de 28´

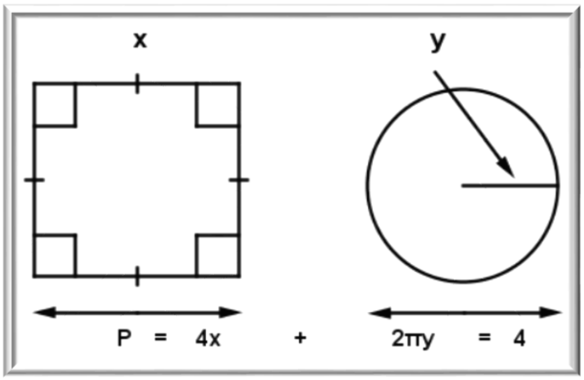
Ejemplo 9. Con cuatro pies de cable se forman un cuadrado y un circulo ¿cuánto cable debe emplearse en cada figura para que encierren la máxima área total posible?

Solución:

$A_T = x^2 + \pi y^2$ (1)

$P = 4x+2\pi y=4$ (2)

$\Rightarrow y = \dfrac{4-4x}{2\pi} = \dfrac{2-2x}{\pi}$ (2)´



(2)´en (1) → $A_T = x^2 + \pi\left(\dfrac{2-2x}{\pi}\right)^2$

$= x^2 + \dfrac{4}{\pi} - \dfrac{8x}{\pi} + \dfrac{4x^2}{\pi}$

$$\rightarrow \frac{dA}{dx} = 2x - \frac{8}{\pi} + \frac{8x}{\pi} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi x - 8 + 8x}{\pi} = 0 \Rightarrow 2x(\pi+4) - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{2\pi+8} = 0.56´$$

x	0.54	0.56	0.58	0	1
A_T	0.561	0.56	0.561	1.27	1

x= 0.56 es de mínima

x= 0 es de máxima

x=0 ^ x=1 son los valores extremos de la función A=f(x); es decir D=x$\in$ [0,1]; ya que

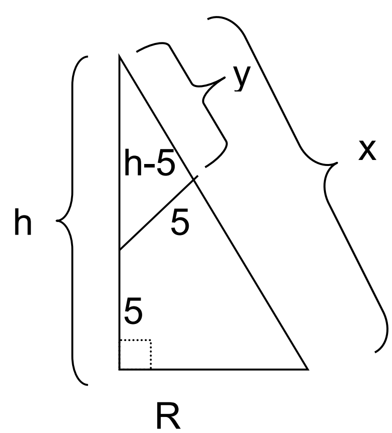
P=4 $\Rightarrow$ x=0 si y= $\dfrac{4}{2\pi}$

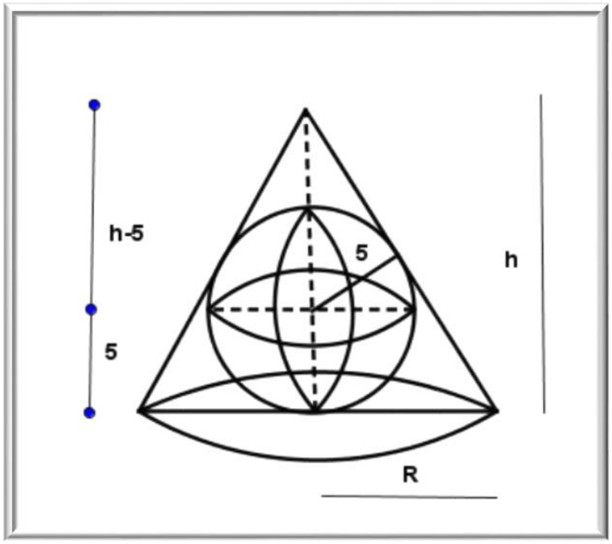
x=1 si y=0

El área máxima es cuando x=0 o sea que los 4 pies deben emplearse en el circulo

Ejemplo 10: Hallar el volumen máximo de un cono circular recto circunscrito a una esfera de radio R = 5 cm.

Solución:





$V_c = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$ (1); por semejanza de triángulos, tenemos: $\dfrac{5}{R} = \dfrac{h-5}{x} = \dfrac{y}{h}$

$$\frac{5}{R} = \frac{\sqrt{(h-5)^2 - 5^2}}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{R} = \frac{\sqrt{\left(h^2 - 10h + 25 - 25\right)}}{h} \Rightarrow \frac{5h}{\sqrt{h^2 - 10h}} = R \Rightarrow \frac{25h^2}{h^2 - 10h} = R^2 \Rightarrow$$

$\dfrac{25h^2}{h-10} = R^2$ (2); $\Rightarrow$(2) en (1)$\rightarrow$ $V_c = \dfrac{\pi h(\frac{25h}{h-10})}{3} = \dfrac{\frac{25\pi h^2}{h-10}}{\frac{3}{1}} = \dfrac{25\pi h^2}{3h-30}$

$$\Rightarrow \frac{dV_c}{dh} = \frac{50\pi h(3h-30) - 3(25\pi h^2)}{(3h-30)^2} = 0$$

$\Rightarrow$ 150 π h^2 -1500 π h -75 π h^2=0; $\Rightarrow$ 75 π h^2 –1500 π h = 0$\Rightarrow$75 π h (h –20) = 0

$\Rightarrow$ h = 0 y h = 20 (valores críticos); h=0 es para V_{min} = 0

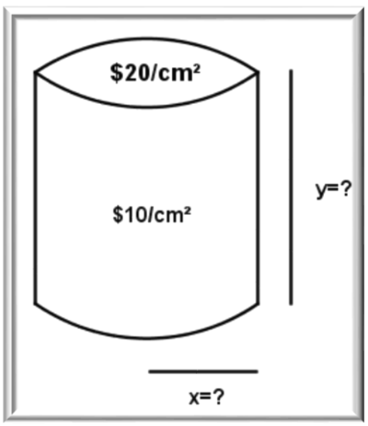
h = 20 en (2)$\rightarrow$ R^2= 50 en (1)$\rightarrow$$V_c$ = 1047.2 cm^3

h = 19 en (2) $\rightarrow$ R^2= 52.8 en (1) $\rightarrow$ V_c = 1050.1 cm^3

h = 21 en (2) $\rightarrow$ R^2= 47.7 en (1) $\rightarrow$ V_c = 1049.6 cm^3

Ejemplo 11: Se desea construir un envase cilíndrico. El costo de la construcción de la parte lateral es \$10/cm^2, y el costo de construcción de las bases es \$ 20/cm^2. Determínese las dimensiones que han de utilizarse si el volúmen es 250 π cm^3 y el costo de construcción ha de ser mínimo.

Solución:



$V = 250\pi\ cm^3$

C_{min} = ?

$C = 10 \times \underbrace{2\pi xy}_{A_L \rightarrow \text{Área Lateral}} + 20 \times \underbrace{2\pi x^2}_{A_B \rightarrow \text{Área bases}}$ (1)

$V = \pi x^2 . y = 250\pi\ cm^3$

$\Rightarrow y = \dfrac{250}{x^2}$ (2); (2) en (1) $\rightarrow$ $C = 20\pi x . \dfrac{250}{x^2} + 40\pi x^2$

$C = 5000\pi x^{-1} + 40\pi x^2 \Rightarrow C'(x) = -5000\pi x^{-2} + 80\pi x = 0$

$\Rightarrow 80\pi x = \dfrac{5000\pi}{x^2} \Rightarrow x^3 = \dfrac{250}{4} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{250}{4}}\,cm$

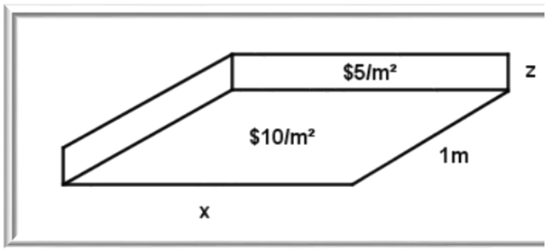
$x \approx 4$ cm $\qquad C''(x) = 10.000\pi x^{-3} + 80\pi$

$C''(4) > 0 \Rightarrow x = 4$ cm es de mín.

x = 4 en (2) $\rightarrow$ $y = \dfrac{250}{x^2} = \dfrac{250}{4^2} \Rightarrow y = 15.6 cm$

Ejemplo 12: Un contenedor de base rectangular, lados rectangulares y sin tapa ha de tener un volumen de 2 m^3. La anchura de la base ha de ser de 1 m., el material cortado a la medida cuesta \$ 10/m^2 para la base, y \$ 5/m^2 para los lados. ¿Cuál es el costo del contenedor más barato?

Solución:



$V = 2\ m^3$

$C_{min} = ?$

$C = X \times 10 + 2XZ \times 5 + 2Z \times 5$

$C = 10X + 10XZ + 10Z$ (1)

$V = X.1.Z = 2 \Rightarrow Z = \frac{2}{x}$ (2) en (1) $\rightarrow$

$C = 10X + 10X.\frac{2}{x} + 10.\frac{2}{x}$

C = 10X +10XZ + 10Z (1)

$C = 10X + 20 + 20X^{-1} \Rightarrow \quad C'(x) = 10 - 20X^{-2} = 0$

$\Rightarrow 10 = \frac{20}{x^2} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow X = \sqrt{2}$ en (2) $\rightarrow z = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$C''(x) = 40X^{-3} \Rightarrow C''(\sqrt{2}) > 0 \Rightarrow X = \sqrt{2}$ es de mín.

En (1) $\rightarrow C = 10\sqrt{2} + 10\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} + 10.\frac{2}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2} + 20 + \frac{20}{\sqrt{2}}$

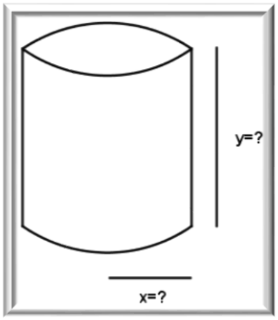
$C = \frac{20 + 20\sqrt{2} + 20}{\sqrt{2}} = \$20\sqrt{2} + 1 = \$48.28 = C$

Ejemplo 13: Un ingeniero de alimentos va a mandar a fabricar latas de forma cilíndrica para almacenar mermelada con una capacidad de 1000 cm^3. Encontrar las dimensiones que minimizarán el costo del metal requerido para hacer el envase, si el costo de las bases es $\$18/cm^2$, y el costo de la parte lateral es $\$10/cm^2$

Solución:

$C = \frac{\$18}{cm^2}.2\pi x^2 + \frac{\$10}{cm^2}.2\pi xy = 36\pi x^2 + 20\pi xy$ (1)

$V = \pi x^2 y = 1000\ cm^3 \Rightarrow y = 1000/\pi x^2$ (2)



(2) en (1) $\rightarrow C = 36\,\pi x^2 + 20\,\pi x.\dfrac{1000}{\pi x^2} \Rightarrow$ $\boxed{C = 36\,\pi x^2 + 20.000\,x^{-1}}$

C'(x) = $72\,\pi x - 20.000\,x^{-2} = 0 \Rightarrow X^3 = \dfrac{20.000}{72\pi} \Rightarrow x = 4.5$ cm

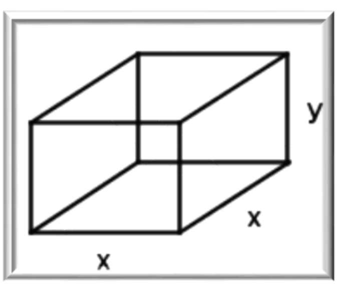
X	4	4.5	5
C	6809.6	6734.7	6827.4

X = 4.5 cm es de mín. $\Rightarrow$ en (2) $\rightarrow$ y = 15.7 cm

https://www.youtube.com/watch?v=sFx38MAKKjo

Ejemplo 14: Si se dispone de 1200 cm^2 de material para construir una caja de base cuadrada y abierta en la base superior, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

Solución:



V = x^2y (1)
$A_T = x^2 + 4xy = 1200$

$$\Rightarrow \frac{1200 - x^2}{4x} = y \quad (2)$$

(2) en (1) $\rightarrow$ V = $x^2\left(\dfrac{1200 - x^2}{4x}\right) \Rightarrow v = 300x - \dfrac{1}{4}x^3$

V''(x) = $300 - \dfrac{3}{4}x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{300 \times 4}{3}} \Rightarrow x = 20$

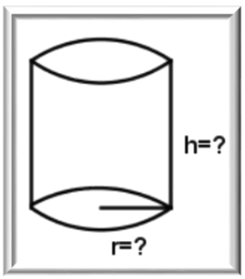
(valor crítico)

X	15	20	25
y	3656	4000	3593

$V_{máx.} = 4000$ cm^3

Ejemplo 15: Cuáles serán las dimensiones de un cilindro de volumen máximo que se desea construir con un pedazo de zinc de 20.000 cm^2, sabiendo que no se desperdicia nada de material.

Solución: $V = \pi r^2 h$ (1); $A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 20.000$



$$\Rightarrow \frac{20.000 - 2r^2\pi}{2\pi r} = h \Rightarrow \quad h = \frac{10.000 - r^2\pi}{r\pi} \quad (2)$$

(2) en (1): $\rightarrow$ $V = r^2\pi \left(\frac{10.000 - r^2\pi}{r\pi}\right)$

$\Rightarrow V = 10.000r - r^3\pi$

$$\frac{dv}{dr} = 10.000 - 3r^2\pi = 0 \Rightarrow \quad r^2 = \frac{10.000}{3\pi} \quad \Rightarrow r = \frac{100}{\sqrt{3\pi}} = 32.6cm \quad (3)$$

(3) en (2) $\rightarrow$ h= 65.1 cm

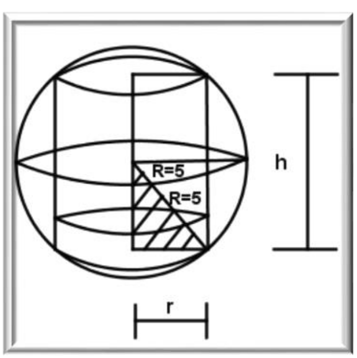
r= 32.6 $\Rightarrow$ h= 65.1 en (1) $\rightarrow$ V= 217.353 cm^3 $\rightarrow$ V. máx.

r= 30 $\Rightarrow$ h= 76 en (1) $\rightarrow$ V= 214.885 cm^3

r= 35 $\Rightarrow$ h= 55.9 en (1) $\rightarrow$ V= 215.128 cm^3

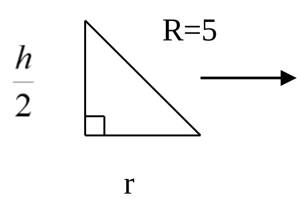
Ejemplo 16: Calcular el volumen máximo de un cilindro circular recto inscrito en una esfera de R= 5 cm.

Solución: $V_c = \pi r^2 h$ (1)



$$5^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \Rightarrow$$

$$25 - \frac{h^2}{4} = r^2 \quad (2)$$



(2) en (1)$\rightarrow$ $V = \pi\left(25 - \frac{h^2}{4}\right) h = 25\pi h - \frac{\pi}{4}h^3$

$$\frac{dv}{dh} = 25\pi - \frac{3\pi}{4}h^2 = 0 \Rightarrow \frac{3\pi}{4}h^2 = 25\pi \Rightarrow h = \frac{\sqrt{25.4}}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} = 5.8cm$$

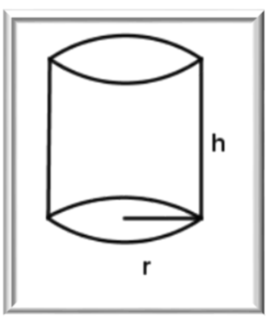
h= 5.8 cm en (2)→ $r^2 = 16\frac{2}{3}$ ⇒r= 4.1 cm ⇒V= 302.3 cm^3

Si h= 5 en (2) → $r^2 = 18\frac{3}{4}$ ⇒ V= 394.5 cm^3

Si h= 6 en (2) → r^2= 16 ⇒ V= 301.6 cm^3

Ejemplo 17: Un ingeniero de alimentos montó una empresa para la cual necesita 2.000 empaques de forma cilíndrica mensuales. Cada empaque debe costar $100. El material de las bases cuesta $10 el dm^2, y el material de la cara lateral cuesta $5 el dm^2. Cuáles serán las dimensiones de cada cilindro para obtener un volumen máximo?

Solución:



V= $\pi R^2 h$ (1) $C = \frac{\$10}{dm^2}.2\pi R^2 + \frac{\$5}{dm^2}2\pi Rh = 100$

⇒100=20πR^2+10πRh → ÷10 →10=2πR^2+πRh

$$\Rightarrow \frac{10 - 2\pi R^2}{\pi R} = h \quad (2)$$

(2) en (1) → V= $\pi R^2(\frac{10 - 2\pi R^2}{\pi R})$ ⇒ V= 10R - πR^3

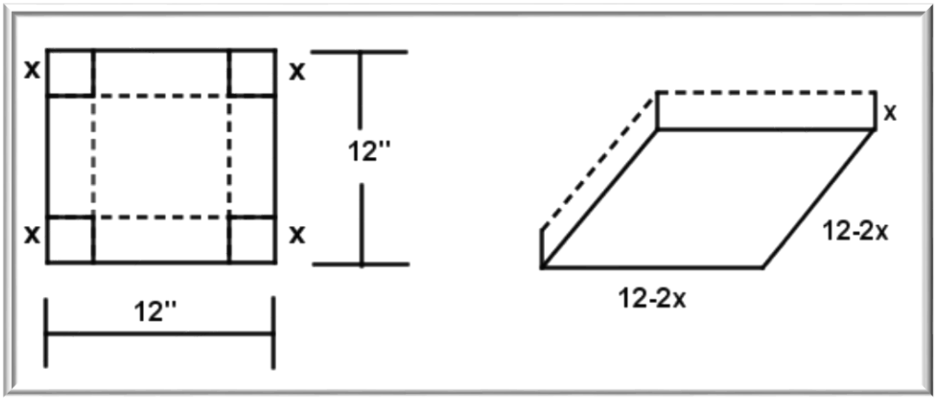
$$\frac{dv}{dR} = 10 - 6\pi R^2 = 0 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6\pi}} = 0.72dm$$

V´´(R)= -12πR

V´´(0.72) < 0 ⇒ R= 0.72 dm es de máx. en (2) → h= 2.98 dm

Ejemplo 18: Se desea hacer una caja abierta con una pieza cuadrada de material de 12´´ de lado, cortando cuadritos iguales de cada esquina y doblando. Hallar el máximo volumen que puede lograrse con una caja así.

Solución:



V= $(12-2x)^2x$ = $(144- 48x+4x^2)x$ = $144x-48x^2+4x^3$ (1)

$$\frac{dv}{dx} = 144 - 96x + 12x^2 = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 12(12 - 8x + x^2) = 0 \Rightarrow 0 = (x^2 - 8x + 12)$$

$\Rightarrow \underset{x=6}{\underset{\downarrow}{(x-6)}}\underset{x=2}{\underset{\downarrow}{(x-2)}} \Rightarrow$ x=6 en (1)$\rightarrow$V= 0; X=2 en (1) $\rightarrow$V= $(12-2.2)^2.2$

$\Rightarrow$V= $128''^3$

https://www.youtube.com/watch?v=rSNvEUnACxI

5.17. PROBLEMAS PROPUESTOS DE MAXIMOS Y MINIMOS

Resuelva los siguientes problemas:

1. Encuentre dos números cuya suma sea 100 y su producto sea máximo. R/ 50, 50.
2. Encuentre dos números positivos cuyo producto sea 100 y su suma mínima. R/ 10,10.
3. Demuestre que de todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene área máxima es el cuadrado.
4. Si se dispone de 1200 m^2 de material para construir una caja con base cuadrada y abierta en la parte superior, encuentre el volumen máximo posible

de la caja. R/ 4000 m^3.

5. Encuentre el punto de la recta y = 2x – 3 que este más cercano al origen. R/ (1.2, -0.6).
6. Encuentre los puntos de la hipérbola $y^2 - x^2 = 4$ que estén más cercanos al punto (2, 0). R/ (1, $\pm\sqrt{5}$).
7. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio r. R/ Cuadrado, lado $\sqrt{2}$ r.
8. Determine las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un triángulo equilátero de lados L si uno de los lados del rectángulo se encuentra en la base del triángulo. R/ $\frac{L}{2}, \sqrt{3}\frac{L}{4}$.
9. Calcule las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia del radio r. R/ Base $\sqrt{3}$ r, altura $3r/2$.
10. Un cilindro circular recto se inscribe en una esfera de radio r. Encuentre el máximo volumen posible del cilindro. R/ $4\pi r^3/(3\sqrt{3})$.
11. Un cilindro circular recto se inscribe en una esfera de radio r. Encuentre la máxima área posible de la superficie del cilindro. R/ $\pi r^2(1+\sqrt{5})$
12. las márgenes superior e inferior de un cartel miden 6 cm cada uno, y las márgenes laterales miden 4 cm cada uno. Si el área del material impreso en el cartel se fija en 384 cm^2, determine las dimensiones del cartel que tenga la mínima área. R/ 24 cm, 36 cm.

https://www.youtube.com/watch?v=5nJ1isr5QfM

5.18. REGLA DE L´HOPITAL

Ya se describieron las formas $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ y ∞ - ∞ como indeterminadas, ya que no nos garantizan que exista un límite, y tampoco nos indican cuál es ese límite en caso de existir. Cuando encontramos una de estas formas indeterminadas, intentamos rescribir la expresión usando diferentes técnicas algebraicas. No obstante, no todas las indeterminaciones pueden resolverse mediante manipulaciones algebraicas. Esto es particularmente cierto cuando se hallan implicados ambos tipos de funciones, algebraicas y trascendentes. Por ejemplo, el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\ell^{2x}-1}{x} = \frac{\ell^{0}-1}{0} = \frac{0}{0} = ?$

produce la indeterminación $\frac{0}{0}$. Dividiendo numerador y denominador por x se obtiene

$\lim_{x\to 0} \frac{\ell^{2x}}{x} - \frac{1}{x}$ lo cual simplemente conduce a otra forma de indeterminación ∞ - ∞ .

Para hallar el límite introducimos un teorema conocido como <u>Regla de L´Hopital</u>. Este teorema establece que bajo ciertas condiciones el límite del cociente f(x)/g(x) se halla determinado por el límite de f´(x)/g´(x).

<u>Regla de L´Hopital</u>: Si lim f(x)/g(x) adopta alguna de las formas indeterminadas 0/0, ∞ - ∞, $\pm\infty/\pm\infty, \infty.0, (\to 1)^{\infty}, 0^{0}$ supuesto que este último exista (ó que sea infinito) $\Rightarrow$

$$\boxed{\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f´(x)}{g´(x)}}$$

<u>Ejemplo 1:</u> Hallar $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$

Solución: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \frac{e^{0}-1}{0} = \frac{0}{0} = ?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{2e^{2x}}{1}}_{aplicando\ L'Hopítal}=\frac{2e^{0}}{1}=2$$

https://www.youtube.com/watch?v=A9KQ-COVCdY

https://www.youtube.com/watch?v=YLeAOU8htSo

Ejemplo 2: Hallar $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2}{\ell^{-x}}$

Solución: $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2}{\ell^{-x}}=\frac{\infty^2}{\ell^{\infty}}=\frac{\infty}{\infty}=?$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{\ell^{-x}}=\lim_{x\to -\infty}\underbrace{\frac{2x}{-\ell^{-x}}}_{Aplicando\ L'Hopital}=\frac{2\infty}{-\ell^{\infty}}=\frac{\infty}{-\infty}=?$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}=\lim_{x\to -\infty}\underbrace{\frac{2}{e^{-x}}}_{Aplicando\ L'Hopital}=\frac{2}{\ell^{\infty}}=\frac{2}{\infty}=0$$

Ejemplo 3: Calcular $\lim\limits_{x\to \infty}\ell^{-x}\sqrt{x}$

Solución: $\lim\limits_{x\to \infty}\ell^{-x}\sqrt{x}=\ell^{-\infty}\sqrt{\infty}=?$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x^{1/2}}{e^{x}}=\lim_{x\to \infty}\underbrace{\frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}}{e^{x}}}_{Aplicando\ L'Hopital}=\frac{\frac{1}{2}\infty^{-1/2}}{e^{\infty}}=\frac{1}{2.\infty}=\frac{1}{\infty}=0$$

Ejemplo 4: Calcular $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

Solución: $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{2}{\infty}\right)^\infty = (1+0)^\infty = (\to 1)^\infty = ?$

⇒vamos a hallar $y = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = \ln \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

$$lny = x.ln \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) \Rightarrow lny = \frac{\lim_{x \to \infty} ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x^{-1}} \Rightarrow \underbrace{\frac{\frac{-2\cancel{x^{-2}}}{\left(1+\frac{2}{x}\right)}}{-\cancel{x^{-2}}}}_{Aplicando\ L¨Hopital}$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{2}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{2}{1+0} = 2$$

$$\Rightarrow \ln y = 2 \Leftrightarrow e^2 = Y \Rightarrow . \lim_{x \to \infty} (1 + \frac{2}{x})^x = e^2$$

Ejemplo 5: Calcular $\lim_{x \to 0^+} (senx)^x$

Solución: $\lim_{x \to 0^+} (senx)^x = (sen0)^0 = 0^0 = ?$

Vamos a hallar $y = \lim_{x \to 0^+} (senx)^x \Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0^+} \ln(senx)^x$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0^+} x.\ln.(\operatorname{sen} x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-\frac{1}{x^2}}}_{L'Hopital} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cot x}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2}{\tan x} = \frac{0}{0} = ?. \Rightarrow \ln y = \frac{-2x}{\underbrace{\sec^2 x}_{L'Hopital}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\ln y = 0 \Leftrightarrow e^0 = y \Rightarrow y = 1. \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} (senx)^x = 1$$

***Ejemplo 6*:** Calcular $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

Solución: $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{\ln 1^+} - \frac{1}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^+} - \frac{1}{0^+} = \infty - \infty = ?$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \right) = \lim_{x \to 1^+} \underbrace{\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1)+\ln x}}_{L'Hopital}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1+x.\ln x}{x}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x-1+x.\ln x} = \frac{1^+ - 1}{1^+ - 1 + 1^+.\ln 1^+} = \frac{0}{0} = ?$$

$\Rightarrow$ se vuelve a aplicar L′hopital

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1+\frac{x}{x}+\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{2+\ln x}=\frac{1}{2+\ln 1^+}=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}$$

***Ejemplo 7*:** Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$

Solución: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{e^\infty}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}=?\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{\underbrace{1}_{L'Hopital}}=\frac{e^\infty}{1}=\infty$

Ejemplo 8: Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{x}$

Solución: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{x}=\frac{e^0}{0}=\frac{1}{0}=?$ **(Aquì hay ¡peligro!);** Si aplicamos L′hopital

$\rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\frac{e^0}{1}=\frac{1}{1}=1$; sería un uso incorrecto de la regla de L′hopital ya que 1/0 no es una de las formas indeterminadas que se especificaron para poder aplicar la regla de L′hopital. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^\pm}\frac{e^x}{x}=\frac{e^0}{0^\pm}=\pm\infty.\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{x}\Rightarrow$ no existe.

Ejemplo 9: Hallar $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}$

Solución: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}=(1+\infty)^{1/\infty}=(\infty)^{\to 0}=?$

⇒vamos a hallar $y = \lim_{x \to \infty} (1+x)^{1/x} \Rightarrow \ln y = \ln \lim_{x \to \infty} (1+x)^{1/x}$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}.\ln(1+x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \underbrace{\frac{\frac{1}{1+x}}{1}}_{Aplicando\ L'Hopital}$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\Rightarrow \ln y = 0 \Leftrightarrow e^0 = Y \Rightarrow \lim_{x \to \infty} (1+x)^{1/x} = 1.$$

Ejemplo 10: Calcular $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

Solución: $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^{1/3}} = \frac{\ln \infty}{\sqrt[3]{\infty}} = \frac{\infty}{\infty} = ?$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^{1/3}} = \underbrace{\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3} x^{-2/3}}}_{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3x^{2/3}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^{2/3}}{x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x^{1/3}} = \frac{3}{\infty^{1/3}} = \frac{3}{\infty} = 0$$

Ejemplo 11: Hallar $\lim_{x \to 0} (1-2x)^{1/x}$

Solución: $y = \lim_{x \to 0} (1-2x)^{1/x} \Rightarrow \quad \ln y = \lim_{x \to 0} \ln(1-2x)^{1/x} \Rightarrow$

$$\ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2x)}{x} = \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\frac{-2}{1-2x}}{1/1}}_{Aplicando\ L'Hopital} = -2 \Rightarrow \ln y = -2 \Leftrightarrow e^{-2} = y$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} (1-2x)^{1/x} = e^{-2}$$

5.19.EJERCICIOS PROPUESTOS DE REGLA DE L'HOPITAL

En los siguientes ejercicios evalúe el límite, si existe. Aplique la Regla de L`Hopital

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{sen\frac{1}{x}}{arc\ \tan x} =$ **R/0**

2. $\lim_{\theta \to 0} \frac{sen\theta - \theta.\cos\theta}{\theta - sen\theta} = 2$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax^2} - e^{bx^2}}{x^2} = a - b$

2. $\lim_{\theta \to 0} \frac{sen\theta - \theta.\cos\theta}{\theta - sen\theta} = 2$

4. $\lim_{x \to \pi/2} \left(\frac{1}{1-senx} - \frac{2}{\cos^2 x} \right) = -1/2$

5. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2senx}{xsenx} = 0$

6. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec^2 x} \right) = 1$

7. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - senx}{x^3} = 1/2$

8. $\lim_{x \to \pi/2} \left(e^{-\tan x} \sec^2 x \right) = 0$

9. $\lim_{x \to +\infty} \left(x^{\frac{1}{x}} \right) = 1$ 10. $\lim_{x \to 0^+} \left(x^{senx} \right) = 1$

11. $\lim_{x \to \pi/2} (1+\cos x)^{\tan x} = e$ 12. $\lim_{x \to 0} (x^2+3x+1)^{2/3x} = e^2$

13. $\lim_{x \to 0} (x+\cos 2x)^{\csc 3x} = e^{1/3}$

14. $\lim_{x \to \pi/2} (senx-\cos x)^{\tan x} = 1/e$

15. $\lim_{x \to \pi/2} (1+\cos x)^{3\sec x} = e^3$

16. $\lim_{x \to 0} \left((\cos x).e^{x^2/2} \right)^{4/x^4} = e^{-1/3}$

17. $\lim_{z \to +\infty} \left(1+\frac{1}{z} \right)^{z+2} = e$

18. $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x+1} \right)^{x} = e$ 19 $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} = e^4$

20. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1} = e$

21. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ R/ 0 **22.** $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}, a \neq 0$ R/ $1/(3a^{\frac{2}{3}})$

23. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$ R/ $\frac{1}{2}$ **24.** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ R/ $\frac{1}{2}$

25. $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{\ln x}{\sqrt{2-x}}$ R/ ∞ **26.** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln \ln x}{\sqrt{x}}$ R/0

27. $\lim\limits_{x \to -0} \frac{\tan \alpha x}{x}$ R/ ∞ **28.** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x + \operatorname{sen} 3x}{x - \operatorname{sen} 3x}$ R/-2

29. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{4x} - 1}{\cos x}$ R/0 **30.** $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x$ R/0

31. $\lim\limits_{x \to \Pi}$ $(x - \pi) \cot x$ R/1 **32.** Lim $\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2}\right)$ R/ ∞

x→0

https://www.youtube.com/watch?time_continue=1&v=S_8I1B-eabA
https://www.youtube.com/watch?v=CLzhYkSTS0g
https://www.youtube.com/watch?v=MCrGzsxfWbQ
https://www.youtube.com/watch?v=6MWJgfr5J4M

CAPITULO VI: INTEGRALES INDEFINIDAS

6.20. EVALUACIÓN DE INTEGRALES INDEFINIDAS

Definición: Una antiderivada de una función f es una función F tal que F`(x) = f(x).

Por ejemplo, como la derivada de x^2 es 2x, x^2 es una antiderivada de 2x, sin embargo, no es la única: d/dx $(x^2 + 1) = 2x$ y d/dx $(x^2 – 5) = 2x$

X^2+C es también una antiderivada de 2x para cualquier constante C. Así, 2x tiene un número infinito de antiderivadas.

Como la expresión $x^2 + C$ describe todas las antiderivadas de 2x, podemos referirnos a ella como la antiderivada más general de 2x, denotada por $\int 2x dx$, que se lee integral indefinida de 2x respecto a x . Escribimos entonces $\int 2xdx = x^2 + C$.

El símbolo $\int$ se llama símbolo de integración, 2x es el integrando y C es la constante de integración. La "dx" es parte de la notación integral e indica la variable implicada. Aquí, x es la variable de integración.

En forma más general, la integral indefinida de cualquier función f con respecto a X se escribe $\int f(x)\, dx$ y denota la antiderivada más general de f. Como todas las antiderivadas de f difieren sólo en una constante, si F es cualquier antiderivada de f, entonces $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, $C \rightarrow$cte.

En resumen, $\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)}$

O si se quiere: $\boxed{\int f(x)\, dx = F(x) + C \;/\; d[F(x) + C] = f(x).dx}$

6.21. REGLAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN

1. $\frac{d}{dx}(Kx) = K \Rightarrow \int Kdx = Kx + C$

2. $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x) \Rightarrow \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3. $\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1} \Rightarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

4. $\frac{d}{dx}(u^n) = n \cdot u^{n-1}\frac{du}{dx} \Rightarrow \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

5. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx} \Rightarrow \int \cos u \cdot du = \operatorname{sen} u + C$

6. $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \int \operatorname{sen} u \cdot du) = -\cos u + C$

7. $\frac{d}{dx}(tanu) = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \int \sec^2 u \cdot du = tanu + C$

8. $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \int \csc^2 u \cdot du = -\cot u + C$

9. $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \cdot du \Rightarrow \int \sec u \tan u \cdot du = \sec u + C$

10. $\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \cdot du \Rightarrow \int \csc u \cot u \cdot du = -\csc u + C$

6.21.1. EJEMPLOS

1. $\underset{(1)}{\int 5dx} = 5x + C$

2. $\int 3x^4 dx = \frac{3x^5}{5} + C$

3. $\int \frac{1}{x^3}dx = \underset{(3)}{\int x^{-3}}\, dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

4. $\int \sqrt{x}dx = \underset{(3)}{\int x^{1/2}}dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$

5. $\int (3x^4 - 5x^2 + x)dx = \underset{(3)}{\int 3x^4dx} - \underset{(3)}{\int 5x^2dx} + \underset{(3)}{\int xdx} = \frac{3x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

Nota: Hay dos reglitas fundamentales que siempre debo tener en cuenta cuando voy a evaluar una integral:

i) Si tengo un polinomio sobre un monomio; distribuyo $\rightarrow$

$$\int \frac{a+b+c+d+.....}{k}.dx = \int \frac{a}{k}dx + \int \frac{b}{k}dx + \int \frac{c}{k}dx + \int \frac{d}{k}dx + ...$$

II) Si tengo un polinomio o un monomio sobre otro polinomio, donde el grado del numerador es mayor o igual al grado del denominador; convierto a fracción mixta $\rightarrow$

$$\int \frac{f(x^n)}{g(x^m)}dx = \int c(x).dx + \int \frac{R(x)}{g(x^m)}dx; \quad n \geq m; \quad \begin{array}{c|c} f(x^n) & g(x^m) \\ \hline R(x) & c(x) \end{array}$$

6. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x+1}{x^{1/2}}dx = \int (\frac{x}{x^{1/2}} + \frac{1}{x^{1/2}})dx = \int (\underset{(3)}{x^{1/2}} + \underset{(3)}{x^{-1/2}})dx$

$$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} + C$$

7. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx = \int \underbrace{tanx \sec x \cdot dx}_{(9)} = \sec x + C$

8. $\int x\underbrace{(x^2+1)^2}_{u \Rightarrow du = 2xdx} dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int \underbrace{(x^2+1)^2}_{u^n} \underbrace{(2xdx)}_{du} dx}_{(4)} = \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)^3}{3} + C$

$$= \frac{(x^2+1)^3}{6} + C$$

9. $\int \underbrace{(x^2+1)^2}_{\substack{u=x^2+1 \Rightarrow du = 2xdx \\ \text{(no esta la x; entonces} \\ \text{desarrollamos el} \\ \text{binomio al cuadrado)}}} dx \Rightarrow \int (x^4 + 2x^2 + 1)dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C$

10. $\int \cos \underbrace{5x}_{u \Rightarrow du = 5dx} dx = \frac{1}{5} \underbrace{\int \cos \underbrace{5x}_{u} \underbrace{5dx}_{du}}_{(5)} = \frac{1}{5} sen 5x + C$

11. $\int \sqrt{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{(2x-1)^{1/2}}_{u^n} \underbrace{(2dx)}_{du} = \frac{1}{2} \frac{(2x-1)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{(2x-1)^{3/2}}{3} + C$

12. $\int sen^2 3x \cdot \cos 3x \cdot dx = \frac{1}{3} \underbrace{\int \underbrace{sen^2 3x}_{u^n} \cdot \underbrace{(\cos 3x \cdot 3dx)}_{du}}_{(4)}$

$$= \frac{1}{3} \frac{sen^3 3x}{3} + C = \frac{sen^3 3x}{9} + C$$

13. $\int 3\underbrace{(3x-1)}_{\substack{u=3x-1\Rightarrow\\ du=3dx}}{}^{4}dx = \frac{(3x-1)^5}{5}+C$

14. $\int (2x+1)\quad \underbrace{(x^2+x)}_{u\Rightarrow du=(2x+1)dx}\quad dx = (x^2+x)^2/2+C$

(4)

15. $\int 3x^2\sqrt{x^3-2}dx = \int \underbrace{(x^3-2)^{1/2}}_{u}\underbrace{(3x^2dx)}_{du} = 2\frac{(x^3-2)^{3/2}}{3}+C$

(4)

16. $\int \frac{-4x}{(1-2x^2)^2}dx = \int \underbrace{(1-2x^2)^{-2}}_{u^n}\underbrace{(-4xdx)}_{du} = \frac{(1-2x^2)^{-1}}{-1}+C$

(4)

17. $\int 4.\underbrace{\cos^2 4x}_{u\Rightarrow du=-\operatorname{sen}4x.4dx}.\operatorname{sen}4x.dx = -\int \underbrace{\cos^2 4x}_{u^n}.\underbrace{(-\operatorname{sen}4x.4dx)}_{du} = -\frac{\cos^3 4x}{3}+c$

(4)

18. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{tanx}}dx = \int \underbrace{(tanx)^{-1/2}}_{u}\underbrace{\sec^2 x.dx}_{du} = \frac{(tanx)^{1/2}}{1/2}+C$

(4)

19. $\int x^2.\operatorname{sen}\underbrace{x^3}_{u\Rightarrow du=3x^2dx}dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}\underbrace{x^3}_{u}.\underbrace{(3x^2.dx)}_{du} = -\frac{1}{3}\cos x^3 + C$

(6)

20. $\int \frac{\sec^2\sqrt{x}}{\underbrace{\sqrt{x}}_{u=x^{1/2}\Rightarrow du=\frac{1}{2}x^{-1/2}dx=\frac{dx}{2\sqrt{x}}}} = 2\int \sec^2\sqrt{x}.(\frac{dx}{2\sqrt{x}}) = 2.tan\sqrt{x}+C$

(7)

21. $$\int \frac{xdx}{\underbrace{\sqrt{1-9x^2}}_{u=1-9x^2 \Rightarrow du=-18xdx}} = -\frac{1}{18}\int \underbrace{(1-9x^2)^{-1/2}}_{u^n}\underbrace{(-18xdx)}_{du} \quad (4)$$

$$= -\frac{1}{18}\frac{(1-9x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{9}\sqrt{1-9x^2} + C$$

22. $$\int \frac{1+\cos 3\theta}{sen^2 3\theta}d\theta = \int \frac{1}{sen^2 3\theta}d\theta + \int \frac{\cos 3\theta}{sen^2 3\theta}d\theta$$

$$= \int \csc^2 3\theta \cdot d\theta + \int \frac{\cos 3\theta}{sen 3\theta}\cdot\frac{1}{sen 3\theta}\cdot d\theta = \frac{1}{3}\int \csc^2 \underbrace{3\theta}_{u} \cdot \underbrace{d\theta}_{du} \quad (8)$$

$$+\frac{1}{3}\int \cot \underbrace{3\theta}_{u} \csc \underbrace{3\theta}_{u} \underbrace{3d\theta}_{du} \ (10) = -\frac{1}{3}\cot 3\theta - \frac{1}{3}\csc 3\theta + C = -\frac{1}{3}(\cot 3\theta - \csc 3\theta) + C$$

23. $$\int (x^2-6x+9)^{3/5}dx = \int \left[(x-3)^2\right]^{3/5}dx = \int \underbrace{(x-3)^{6/5}}_{u^n}\underbrace{dx}_{du} = \frac{5(x-3)^{11/5}}{11} + C \quad (4)$$

24. $$\int x \underbrace{\sqrt[3]{(x^2+5)^2}}_{\substack{u=x^2+5 \\ du=2xdx}} dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{(x^2+5)^{2/3}}_{u^n} \cdot \underbrace{2xdx}_{du} = \frac{1}{2}\frac{(x^2+5)^{5/3}}{5/3} + C \quad (4)$$

$$= \frac{3}{10}(x^2+5)^{5/3} + C$$

25. $$\int \ln e^{2x-1}dx = \int (2x-1)\underbrace{\ln e}_{\ln e=1}\,dx = \int (\underset{(3)}{2x} - \underset{(1)}{1})dx = \frac{2x^2}{2} - x + C$$

$$= x^2 - x + C$$

26. $\displaystyle\int \frac{x\sec^2(3x^2)}{\tan^4(3x^2)}dx = \frac{1}{6}\int \underbrace{\tan^{-4}(3x^2)}_{u^n}\underbrace{\sec^2(3x^2)6xdx}_{du} = \frac{1}{6}\frac{\tan^{-3}(3x^2)}{-3} + C$

$$(4)$$

$$= -\frac{1}{18\tan^3(3x^2)} + C$$

27. $\displaystyle\int \underbrace{sen^3 5x}_{\substack{u=sen5x\\ du=\cos 5x\cdot 5dx}} \cos 5xdx = \frac{1}{5}\int \underbrace{sen^3 5x}_{u^n}\underbrace{\cos 5x \cdot 5dx}_{du} = \frac{1}{5}\frac{sen^4 5x}{4}$

$$(4)$$

$$= \frac{1}{20}sen^4 5x + C$$

28. $\displaystyle\int \frac{x\csc^2(x^2+3)}{\cot^5(x^2+3)}dx = \int \cot^{-5}(x^2+3)\csc^2(x^2+3)xdx$

$$= -\frac{1}{2}\int \underbrace{\cot^{-5}(x^2+3)}_{u^n}\underbrace{\left[-\csc^2(x^2+3)2xdx\right]}_{du} = -\frac{1}{2}\frac{\cot^{-4}(x^2+3)}{-4} + C$$

$$(4)$$

$$= \frac{1}{8\cot^4(x^2+3)} + C$$

29. $\displaystyle\int \frac{\cos^{-3}(5x^2)xdx}{(sen5x^2)^{-1}} = \int \cos^{-3}(5x^2)sen(5x^2)xdx$

$$= -\frac{1}{10}\int \underbrace{\cos^{-3}(5x^2)}_{u^n}\underbrace{\left[-sen(5x^2)10xdx\right]}_{du} = -\frac{1}{10}\frac{\cos^{-2}(5x^2)}{-2} + C$$

(4)

$$= \frac{1}{20\cos^2(5x^2)} + C$$

30. $\int \frac{2x\cos(7x^2+3)}{sen^{-5}(7x^2+3)}dx = \frac{1}{7}\int \underbrace{sen^5(7x^2+3)}_{u^n}\cdot\underbrace{\cos(7x^2+3)14xdx}_{du}$

(4)

$$= \frac{1}{7}\frac{sen^6(7x^2+3)}{6} + C = \frac{sen^6(7x^2+3)}{42} + C$$

31. $\int \frac{x+2}{\sqrt{-x^2-4x}}dx = -\frac{1}{2}\int \underbrace{(-x^2-4x)^{-1/2}}_{u^n}\underbrace{(-2x-4)dx}_{du}$

(4)

$$= -\frac{1}{2}\frac{(-x^2-4x)^{1/2}}{1/2} + C = -\sqrt{-x^2-4x}dx$$

32. $\int \underbrace{senx^2 x\sqrt{\cos x^2}}_{\substack{u=\cos x^2 \\ du=-senx^2 2xdx}}dx = -\frac{1}{2}\int \underbrace{(\cos x^2)^{1/2}}_{u^n}\underbrace{(-senx^2 2xdx)}_{du}$

(4)

$$= -\frac{1}{2}\frac{(\cos x^2)^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{(\cos x^2)^{3/2}}{3} + C$$

33. $\int \frac{3x-4}{\sqrt{3x^2-8x}}dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{(3x^2-8x)^{-1/2}}_{u^n}\underbrace{(6x-8)dx}_{du}$

(4)

$$= \frac{1}{2}\frac{(3x^2-8x)^{1/2}}{1/2} + C = \sqrt{3x^2-8x} + C$$

34. $\int senax\sqrt{\cos ax}\,dx = -\frac{1}{a}\int \underbrace{(\cos ax)^{1/2}}_{u^n}\underbrace{(-senax\cdot adx)}_{du}$

(4)

$$= -\frac{1}{a}\frac{(\cos ax)^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{2}{3a}(\cos ax)^{3/2} + C$$

35. $\int \frac{x^2\csc^2 x^3}{\cot^3 x^3}dx = -\frac{1}{3}\int \underbrace{(\cot x^3)^{-3}}_{u^n}\underbrace{(-\csc^2 x^3 3x^2 dx)}_{du}$

(4)

$$= -\frac{1}{3}\frac{(\cot x^3)^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{6\cot^2 x^3} + C$$

6.21.2. EJERCICIOS 1 (PROPUESTOS)

Evaluar:

1. $\int\left(x^3+2\right)dx$ **R/** $\frac{1}{4}x^4 + 2x + c$

2. $\int\left(x^{\frac{3}{2}} + 2x + 1\right)dx$ **R/** $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x^2 + x + c$

3. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$ **R/** $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$

4. $\int \frac{1}{x^3}dx$ **R/** $-\frac{1}{2x^2}+c$

5. $\int \frac{1}{4x^2}dx$ **R/** $-\frac{1}{4x}+c$

6. $\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}dx$ **R/** $\frac{2}{15}x^{\frac{1}{2}}(3x^2+5x+15)+c$

7. $\int (x+1)(3x-2)dx$ **R/** $x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+c$

8. $\int \frac{t^2+2}{t^2}dt$ **R/** $t-\frac{2}{t}+c$

9. $\int (\sec^2\theta-\operatorname{sen}\theta)d\theta$ **R/** $\tan\theta+\cos\theta+c$

10. $\int 5x\sqrt[3]{1+x^2}dx$ **R/** $\frac{15}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+c$

11. $\int \frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2}dx$ **R/** $-\frac{1}{2(x^2+2x-3)}dx$

12. $\int \frac{x^2+3x+7}{\sqrt{x}}dx$ **R/** $\frac{2}{5}\sqrt{x}(x^2+5x+35)+c$

13. $\int (9-y)\sqrt{y}dy$ **R/** $\frac{2}{5}y^{\frac{3}{2}}(15-y)+c$

14. $\int \operatorname{sen}2x.dx$ **R/** $-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

15. $\int x.\cos x^2.dx$ **R/** $\frac{1}{2}\operatorname{sen}x^2+c$

16. $\int \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$ **R/** $2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+c$

17. $\int \sec(1-x).\tan(1-x).dx$ **R/** $-\sec(1-x)+c$

18. $\int sen2x.\cos 2x.dx$ **R/** $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x+c$

19. $\int \frac{\csc^2 x}{\cot^3 x}.dx$ **R/** $\frac{1}{2}\tan^2 x + c$

6.22. LA REGLA DEL LOGARITMO PARA LA INTEGRACIÓN

Sea u una función de x variable; entonces:

$$\boxed{\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \qquad \text{Fórmula (11)}}$$

6.22.1. EJEMPLOS

1. $\int \frac{1}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2dx}^{du}}{\underbrace{2x-1}_{u}} = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + c = \ln(2x-1)^{\frac{1}{2}} + c$

$= \ln\sqrt{2x-1} + c$

3. $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x}dx = \ln(x^3+x) + c$

$u \Rightarrow du = (3x^2+1)dx$

4. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}dx = \ln(\tan x) + c$

$u \Rightarrow du = \sec^2 x.dx$

5. $\int \frac{x+1}{x^2+2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x) + c = \ln\sqrt{x^2+2x} + c$

$$u \Rightarrow du = (2x+2)dx = 2(x+1)dx$$

6. $\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$;

$$\begin{array}{rr|l} x^2+x+1 & & x^2+1 \\ \cline{3-3} -x^2 \quad\quad -1 & & 1 \\ \hline x & & \end{array} \Rightarrow 1+\frac{x}{x^2+1}$$

$$= \int \left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)dx = \underbrace{\int dx}_{(1)} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2xdx}{x^2+1}}_{(11)} = x + \ln\sqrt{x^2+1} + c$$

7. $\int \frac{1}{x \ln x}dx = \underbrace{\int \frac{\overset{du}{\cancel{dx/x}}}{\underset{u}{\ln x}}}_{(11)} = \ln(\ln x) + c$

8. $\int \tan x.dx = \underbrace{\int \frac{senx}{\cos x}dx}_{(11)} = -\int \frac{-senx}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + c$

$u \Rightarrow du = -senx.dx$

9. $\int \sec x.dx = \int \sec x\left(\frac{\sec x + tanx}{\sec x + tanx}\right)dx = \int \frac{\overbrace{\sec^2 x + \sec x.tanx}^{du}}{\underbrace{\sec x + tanx}_{u\ (11)}}dx$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + c$$

Entonces observamos que con la fórmula11se deducen las siguientes fórmulas:

$$\boxed{\begin{array}{l} 12.\ \int \tan u.du = -\ln|\cos u| + c \\ 13.\ \int \cot u.du = \ln|sen\,u| + c \\ 14.\ \int \sec u.du = \ln|\sec u + \tan u| + c \\ 15.\ \int \csc u.du = -\ln|\csc u + \cot u| + c \end{array}}$$

6.23. REGLAS DE INTEGRACIÓN PARA FUNCIONES EXPONENCIALES

$$16. \quad \int e^u.du = e^u + c$$

$$17. \quad \int a^u.du = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

e=2,71…., a=cte.

6.23.1. EJEMPLOS

1. $\int e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+1}.3dx = \frac{1}{3}e^{3x+1} + c$ (16)

$u = 3x+1$

$du = 3.dx$

2. $\int 5x.e^{-x^2}.dx = -\frac{5}{2}\int e^{-x^2}\left(-2x\,dx\right) = -\frac{5}{2}e^{-x^2} + c$ (16)

$u = -x^2 \Rightarrow du = -2x\,dx$

3. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = -\int e^{1/x}\left(-\frac{dx}{x^2}\right) = -e^{1/x} + c$ (16)

$u = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow du = -x^{-2}dx = -\frac{dx}{x^2}$

4. $\int \operatorname{sen} x.e^{\cos x}.dx = -\int e^{\cos x}\left(-\operatorname{sen} x dx\right) = -e^{\cos x} + c$

$u = \cos x \Rightarrow du = -\operatorname{sen} x.dx$

5. $\int 2^x.dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c$ (17)

$u = x \Rightarrow du = dx$

6. $\int 5^{6x}dx = \frac{1}{6}\int 5^{6x}.6dx = \frac{1}{6}.\frac{5^{6x}}{\ln 5} + c$ (17)

6.24. EJERCICIOS VARIOS RESUELTOS.

1. $$\int \frac{x^2+1}{\underbrace{x^3+3x+1}_{u=\Rightarrow du=(3x^2+3)dx=3(x^2+1)dx}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3(x^2+1)dx}{x^3+3x+1} = \frac{1}{3}\ln(x^3+3x+1)+c = \ln\sqrt[3]{x^3+3x+1}+c$$

(11)

2. $$\int \frac{3x^3+4x}{x^2+3x}dx = \int (3x-9)dx + 31\int \frac{xdx}{\underbrace{x^2+3x}_{x(x+3)}} = \frac{3x^2}{2} - 9x + 31\ln(x+3)+c$$

(3) (1) (11)

$$\begin{array}{r|l} 3x^3+4x & x^2+3x \\ \hline -3x^3-9x^2 & 3x-9 \\ \hline -9x^2+4x & \\ 9x^2+27x & \\ \hline 31x & \end{array} \quad \left.\right\} \; 3x-9+\frac{31x}{x^2+3x}$$

3. $$\int \frac{e^{\cos 2x}}{\csc 2x}dx = -\frac{1}{2}\int e^{\cos 2x}\left(\frac{-2dx}{\csc 2x}\right) = -\frac{1}{2}e^{\cos 2x}+c$$

(16)

$$u=\cos 2x \quad \Rightarrow du = -\operatorname{sen} 2x.2dx = \frac{-2dx}{\csc 2x}$$

4. $$\int \frac{dx}{x\ln\left(x^2\right)} = \int \frac{dx}{x.2\ln x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\,\underbrace{\ln x}_{u=\ln x\Rightarrow du=dx/x}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx/x}{\ln x} = \frac{1}{2}\ln\left|\ln x\right| + c = \ln\sqrt{\ln x}+c$$

(11)

5. $$\int \frac{\sqrt{x}.dx}{1-x\sqrt{x}} = \int \frac{x^{1/2}.dx}{\underbrace{1-x^{3/2}}_{u \Rightarrow du = -\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.dx}} = -\frac{2}{3}\int \frac{-\frac{3}{2}x^{1/2}.dx}{1-x^{3/2}} = -\frac{2}{3}\ln\left(1-x^{3/2}\right)+c$$

(11)

6. $$\int e^{sen\pi x}.\cos\pi x.dx = \frac{1}{\pi}\int e^{sen\pi x}.\cos\pi x.dx = \frac{1}{\pi}e^{senx} + c$$

$$u = sen\pi x \Rightarrow du = \cos\pi x.\pi dx$$

6.24.1 EJERCICIOS VARIOS PROPUESTOS

1. $\int \frac{x}{x^2+1}dx$ R/ $\ln\sqrt{x^2+1}+c$

2. $\int \frac{x^2-4}{x}.dx$ R/ $\frac{x^2}{2}-4\ln|x|+c$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}.dx$ R/ $2\sqrt{x+1}+c$

4. $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+9x+1}.dx$ R/ $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+3x^2+9x+1\right|+c$

5. $\int \frac{1}{x^{2/3}\left(1+x^{1/3}\right)}.dx$ R/ $3\ln\left|1+x^{1/3}\right|+c$

6. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}.dx$ R/ $2\left[\sqrt{x}-\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right]+c$

7. $\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^3}.dx$ R/ $\ln|x-1| + \frac{1}{2(x-1)^2} + c$

8. $\int \cos(1-x).dx$ R/ $-sen(1-x)+c$

9. $\int \frac{\sec x.\tan x}{\sec x - 1}.dx$ R/ $\ln|\sec x - 1| + c$

10. $\int \frac{senx}{1+\cos x}.dx$ R/ $-\ln|1+\cos x| + c$

11. $\int \frac{1}{x\ln(3x)}.dx$ R/ $\ln|\ln 3x| + c$

12. $\int \frac{x^2+3}{x}.dx$ R/ $\frac{x^2}{2} + 3\ln|x| + c$

13. $\int \frac{x^2}{x^3-1}.dx$ R/ $\frac{1}{3}\ln|x^3-1| + c$

14. $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}.dx$ R/ $2\sqrt{\ln x} + c$

15. $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.dx$ R/ $x - \ln(e^x+1) + c$

16. $\int e^x\sqrt{1-e^x}.dx$ R/ $-\frac{2}{3}(1-e^x)^{3/2} + c$

17. $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.dx$ R/ $\ln|e^x - e^{-x}| + c$

18. $\int \frac{5-e^x}{e^{2x}}.dx$ R/ $-\frac{5}{2}e^{-2x} + e^{-x} + c$

19. $\int e^{-x}.\tan(e^{-x}).dx$ R/ $\ln|\cos(e^{-x})| + c$

20. $\int x.e^{cos(5x^2)}.sen(5x^2).dx$ R/ $-\frac{1}{10}e^{cos(5x^2)} + c$

21. $\int 3^{x^3-3x}.(x^2-1).dx$ R/ $\frac{3^{x^3-3x-1}}{ln3}+c$

22. $\int x^2.cot^3(4x^3).csc^2(4x^3).dx$ R/ $-\frac{1}{48}.cot^4(4x^3) \quad +c$

23. $\int \frac{18x^3+12x^2-23x-14}{6x^2-7}dx$ R/ $3x^2+2x-\frac{1}{6}\ln(6x^2-7)+c$

https://www.youtube.com/watch?v=1-K3v66kCvo
https://www.youtube.com/watch?time_continue=2&v=KOsjc_wSuUs
https://www.youtube.com/watch?v=lTSwyzgdkBg
https://www.youtube.com/watch?v=FMCoy91U3IM

INDICE

https://www.youtube.com/watch?v=1-K3v66kCvo
https://www.youtube.com/watch?time_continue=2&v=KOsjc_wSuUs
https://www.youtube.com/watch?v=lTSwyzgdkBg
https://www.youtube.com/watch?v=FMCoy91U3IM